

Р. М. Кушнір

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА

Механіка. Молекулярна фізика

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів нефізичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2003

УДК [53+531+539.2](075.8)
К-96
ББК В2я73-1+В3я73-1+В36я73-1

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. АПН України *М. І. Шут*
(Національний педагогічний університет імені
М. П. Драгоманова);
д-р фіз.-мат. наук, проф. *Б. А. Лукіянець* (Національний
університет “Львівська політехніка”);
д-р. хім. наук, проф. *Є. П. Ковальчук* (Львівський
національний університет імені Івана Франка).

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів нефізичних спеціальностей
вищих навчальних закладів (лист №14/18.2-1843 від 09. 10. 2002).*

Кушнір Р. М.

К-96 Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика. Навч.
посібн. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка,
2003. – 404 с.
ISBN 966–613–273–7

У посібнику викладено фізичні закони механіки, коливання, хвилі, елементи спеціальної теорії відносності, а також основні закони молекулярної фізики і термодинаміки. Матеріал посібника відповідає програмі з фізики для студентів хімічних та інженерно-технічних спеціальностей.

Для студентів нефізичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК В2я73-1+В3я73-1+В36я73-1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	11
ВСТУП.....	13
1. Предмет фізики та її зв'язок з іншими науками і технікою....	13
2. Одиниці фізичних величин та їхні розмірності.....	14
3. Вектори та їхні властивості.....	16

ЧАСТИНА І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розділ 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА.....	21
1.1. Механічний рух.....	21
1.2. Способи опису руху точки.....	22
1.3. Швидкість.....	24
1.4. Прискорення.....	26
1.5. Кінематика твердого тіла.....	29
1.6. Кутова швидкість. Кутове прискорення.....	31
Контрольні запитання.....	33
Приклади розв'язування задач.....	33
Задачі.....	35
Розділ 2. ЗАКОНИ ДИНАМІКИ.....	37
2.1. Закони Ньютона.....	37
2.2. Принцип відносності Галілея.....	41
2.3. Система матеріальних точок. Рух центра мас системи....	43
2.4. Швидкість центра мас системи.....	45
2.5. Рух тіл змінної маси.....	47
2.6. Види сил. Фундаментальні сили.....	48
2.7. Сили у механіці. Гравітаційні сили.....	49
2.8. Інертна і гравітаційна маси.....	53
2.9. Припливи.....	54
2.10. Космічні швидкості.....	55
2.11. Сили тертя.....	57
2.12. Пружні сили. Види деформацій.....	60
2.13. Деформація розтягу.....	61
2.14. Деформація зсуву.....	63
Контрольні запитання.....	64
Приклади розв'язування задач.....	64
Задачі.....	66
Розділ 3. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ.....	67
3.1. Сили інерції.....	67
3.2. Сили інерції у поступальному русі системи відліку.....	69

3.3. Відцентрова сила інерції.....	69
3.4. Сила Коріоліса.....	70
3.5. Штучна гравітація.....	71
Контрольні запитання.....	72
Приклади розв'язування задач.....	73
Задачі.....	74
Розділ 4. ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	75
4.1. Момент сили.....	75
4.2. Момент інерції.....	77
4.3. Момент імпульсу.....	78
4.3.1. Момент імпульсу матеріальної точки.....	78
4.3.2. Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі.....	80
4.4. Основний закон динаміки обертального руху.....	81
4.4.1. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі....	81
4.4.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.....	83
4.5. Обчислення моменту інерції твердого тіла.....	85
4.6. Теорема Штайнера.....	87
4.7. Вільні осі.....	89
4.8. Поняття про тензор інерції.....	91
Контрольні запитання.....	93
Приклади розв'язування задач.....	94
Задачі.....	95
Розділ 5. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ.....	96
5.1. Закон збереження імпульсу.....	96
5.2. Закон збереження моменту імпульсу.....	98
5.3. Поняття про гіроскоп.....	100
5.4. Енергія, робота, потужність.....	101
5.5. Кінетична енергія поступального руху.....	102
5.6. Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.....	103
5.7. Консервативні сили.....	104
5.8. Потенціальна енергія.....	105
5.9. Потенціальна енергія у деяких випадках.....	106
5.9.1. Потенціальна енергія у полі тяжіння Землі.....	106
5.9.2. Потенціальна енергія тіла у гравітаційному полі.	107
5.9.3. Потенціальна енергія пружної деформації.....	109

5.10. Зв'язок між потенціальною енергією і консервативною силою.....	110
5.11. Закон збереження механічної енергії.....	111
Контрольні запитання.....	112
Приклади розв'язування задач.....	113
Задачі.....	115
Розділ 6. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ.....	117
6.1. Зіткнення.....	117
6.2. Потенціальна крива. Стан рівноваги тіла.....	120
6.3. Закони збереження у найпростіших хімічних реакціях.....	122
6.3.1. Закон збереження імпульсу.....	122
6.3.2. Система координат центра мас.....	123
6.3.3. Реакційна здатність молекул.....	124
6.3.4. Енергія активації.....	125
Контрольні запитання.....	126
Приклади розв'язування задач.....	127
Задачі.....	128
Розділ 7. МЕХАНІКА РІДИН.....	130
7.1. Закони гідростатики.....	130
7.2. Гідродинаміка. Течія рідини.....	131
7.3. Рівняння нерозривності.....	133
7.4. Рівняння Бернуллі.....	133
7.5. Застосування рівняння Бернуллі.....	136
7.5.1. Горизонтальний потік.....	136
7.5.2. Вимірювання швидкості потоку.....	137
7.6. Застосування закону збереження імпульсу до руху рідини	138
7.7. Течія в'язкої рідини по трубі.....	139
7.7.1. В'язкість рідин.....	139
7.7.2. Формула Пуазейля.....	141
7.8. Рух тіл у рідині та газі.....	143
7.9. Піднімальна сила крила.....	145
7.10. Уявлення про теорію механічної подібності.....	146
7.11. Аеродинаміка надзвукових швидкостей.....	147
Контрольні запитання.....	148
Приклади розв'язування задач.....	149
Задачі.....	150
Розділ 8. КОЛИВАННЯ.....	152
8.1. Кінематика коливань.....	152

8.2. Швидкість і прискорення у коливальному русі. Рівняння гармонічного осцилятора.....	154
8.3. Зображення гармонічних коливань у комплексній формі	157
8.4. Динаміка гармонічних коливань. Вільні коливання.....	158
8.5. Фізичний маятник.....	160
8.6. Математичний маятник.....	162
8.7. Енергія гармонічного коливання.....	162
8.8. Додавання коливань. Метод векторних діаграм.....	164
8.9. Биття.....	166
8.10. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	168
8.11. Фігури Ліссажу.....	171
8.12. Згасальні коливання.....	172
8.13. Вимушені коливання.....	177
8.14. Поняття про коливання зв'язаних систем.....	184
8.15. Коливання молекули.....	187
8.16. Поняття про розклад Фур'є.....	189
Контрольні запитання.....	190
Приклади розв'язування задач.....	190
Задачі.....	193
Розділ 9. ПРУЖНІ ХВИЛІ.....	194
9.1. Характеристика хвилі.....	194
9.2. Рівняння плоскої хвилі.....	195
9.3. Поширення хвиль у пружному середовищі.....	197
9.4. Стоячі хвилі.....	199
9.5. Енергія пружної хвилі. Потік енергії.....	203
9.6. Звукові хвилі.....	205
9.6.1. Об'єктивні характеристики звуку.....	205
9.6.2. Суб'єктивні характеристики звуку.....	207
9.7. Ультразвук. Кавітація. Застосування ультразвуку.....	209
9.8. Інфразвук.....	211
9.9. Ефект Доплера.....	211
Контрольні запитання.....	213
Приклади розв'язування задач.....	213
Задачі.....	214
Розділ 10. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.....	215
10.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца.....	215
10.2. Наслідки з перетворень Лоренца.....	217

10.2.1. Зменшення довжини тіла.....	217
10.2.2. Одночасність подій.....	219
10.2.3. Сповільнення часу.....	220
10.3. Інтервал між подіями.....	221
10.4. Релятивістський закон додавання швидкостей.....	223
10.5. Релятивістський імпульс.....	225
10.6. Релятивістська кінетична енергія.....	226
10.7. Повна енергія тіла і енергія спокою.....	228
Контрольні запитання.....	229
Приклади розв'язування задач.....	229
Задачі.....	231

ЧАСТИНА II. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

I ТЕРМОДИНАМІКА

Розділ 11. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ.....	232
11.1. Молекулярно-кінетичний і термодинамічний методи опису явищ природи.....	232
11.2. Термодинамічні параметри. Стан системи.....	233
11.3. Оцінка мас і розмірів молекул.....	234
11.4. Ідеальний газ.....	235
11.5. Закони ідеального газу.....	237
11.6. Рівняння стану ідеального газу.....	239
Контрольні запитання.....	241
Приклади розв'язування задач.....	241
Задачі.....	241
Розділ 12. КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ.....	243
12.1. Основне рівняння кінетичної теорії газів.....	243
12.2. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів.....	246
12.3. Ступені вільності молекул.....	248
12.4. Розподіл енергії за ступенями вільності молекул.....	250
12.5. Функція розподілу молекул за швидкостями (Максвелла).....	250
12.6. Вплив температури на перебіг хімічної реакції у газовій суміші.....	256
12.7. Дослід Штерна.....	256
12.8. Барометрична формула.....	257
12.9. Розподіл Больцмана.....	259
12.10. Вільний пробіг молекул.....	260
Контрольні запитання.....	262
Приклади розв'язування задач.....	262

Задачі.....	264
Розділ 13. ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ГАЗАХ.....	265
13.1. Дифузія. Внутрішнє тертя. Теплопровідність.....	265
13.2. Теорія процесів перенесення в газах.....	268
13.2.1. Потік молекул через поверхню.....	268
13.2.2. Дифузія.....	269
13.2.3. Внутрішнє тертя (в'язкість).....	272
13.2.4. Теплопровідність.....	274
13.2.5. Співвідношення між коефіцієнтами явищ перенесення.	276
Контрольні запитання.....	276
Приклади розв'язування задач.....	277
Задачі.....	277
Розділ 14. МЕТОДИ ОТРИМАННЯ І ВИМІРЮВАННЯ ВИСОКОГО ВАКУУМУ.....	279
14.1. Методи отримання високого вакууму.....	279
14.1.1. Насоси попереднього розрідження.....	280
14.1.2. Високовакуумні насоси.....	280
14.2. Вимірювання низьких тисків.....	282
14.2.1. Термоелектричний манометр.....	282
14.2.2. Іонізаційний манометр.....	282
14.2.3. Манометр Мак-Леода.....	283
14.3. Властивості газів за низьких тисків.....	285
14.3.1. Теплопередача.....	285
14.3.2. Ефузія.....	286
Контрольні запитання.....	288
Розділ 15. РЕАЛЬНІ ГАЗИ.....	289
15.1. Потенціальна крива взаємодії молекул.....	289
15.2. Поняття про природу сил взаємодії між молекулами.....	291
15.3. Рівняння стану реального газу (Ван-дер-Ваальса).....	292
15.4. Ізотерми Ван-дер-Ваальса.....	294
15.5. Властивості насиченої пари.....	296
15.6. Вологість повітря.....	297
Контрольні запитання.....	298
Приклади розв'язування задач.....	299
Задачі.....	299
Розділ 16. ТЕРМОДИНАМІКА. ПЕРШИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ.....	300
16.1. Способи перенесення теплової енергії.....	300
16.2. Оборотні та необоротні процеси.....	301

16.3. Внутрішня енергія.....	303
16.4. Перший принцип термодинаміки.....	304
16.5. Внутрішня енергія ідеального газу.....	305
16.6. Робота в термодинаміці.....	306
16.7. Теплоємність газу.....	307
16.8. Залежність теплоємності газу від температури.....	309
16.9. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона.....	310
16.10. Політропний процес.....	313
16.11. Робота ідеального газу в різних процесах.....	314
16.12. Внутрішня енергія реального газу.....	316
16.13. Ефект Джоуля-Томсона (адіабатне розширення реального газу).....	317
16.14. Зрідження газів.....	321
Контрольні запитання.....	322
Приклади розв'язування задач.....	323
Задачі.....	324
Розділ 17. ДРУГИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ.....	325
17.1. Циклічні (колові) процеси. Теплова машина.....	325
17.2. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно.....	326
17.3. Принцип дії холодильної машини.....	329
17.4. Поняття про роботу двигунів внутрішнього згорання.....	331
17.5. Зведена кількість теплоти. Нерівність Клаузіуса.....	332
17.6. Поняття про ентропію.....	333
17.7. Статистичне тлумачення ентропії.....	338
17.8. Формулювання другого принципу термодинаміки.....	339
17.9. Теорема Нернста.....	341
17.10. Термодинамічні потенціали Гельмгольца і Гіббса.....	342
Контрольні запитання.....	345
Приклади розв'язування задач.....	345
Задачі.....	346
Розділ 18. ТВЕРДЕ ТІЛО.....	348
18.1. Кристали.....	348
18.2. Типи кристалічних ґраток.....	350
18.3. Вплив дефектів кристалічної ґратки на механічні властивості кристалів.....	351
18.4. Енергетичний спектр класичного і квантового осциля- торів	352
18.5. Теплові коливання атомів у кристалі. Фонони.....	353
18.6. Механізм теплопровідності кристалів.....	355
18.7. Теплоємність твердих тіл.....	357

18.7.1. Формула Дюлонга і Пті.....	357
18.7.2. Поняття про теорію теплоємності твердих тіл Айнштейна і Дебая.....	358
Контрольні запитання.....	360
Приклади розв'язування задач.....	360
Задачі.....	361
Розділ 19. РІДИНИ.....	362
19.1. Структура рідин.....	362
19.2. Поняття про діркову теорію рідини.....	364
19.3. Дифузія в рідинах.....	365
19.4. Поверхневий натяг.....	366
19.5. Змочування.....	369
19.6. Тиск під викривленою поверхнею рідини. Формула Лапласа.....	371
19.7. Капілярні явища.....	372
Контрольні запитання.....	374
Приклади розв'язування задач.....	374
Задачі.....	376
Розділ 20. ЗМІНА АГРЕГАТНОГО СТАНУ РЕЧОВИНИ.....	377
20.1. Фази і фазові переходи.....	377
20.2. Випаровування і конденсація.....	378
20.3. Кипіння.....	379
20.4. Сублімація. Плавлення і кристалізація.....	380
20.5. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.....	382
20.6. Діаграма стану.....	383
20.7. Аморфні тіла. Полімери.....	385
20.8. Рідкі кристали.....	386
20.9. Розчини.....	388
20.10. Осмотичний тиск.....	391
20.11. Сплави та тверді розчини.....	392
20.12. Поняття про старіння та загартовування матеріалів..	394
Контрольні запитання.....	396
Приклади розв'язування задач.....	396
Задачі.....	398
Список літератури.....	499
Предметний покажчик.....	400

ПЕРЕДМОВА

Написання посібника з фізики, яка є фундаментом природознавчої та інженерної освіти, зумовлює проблему вибору відповідної форми курсу фізики, переліку питань, які треба розглянути, зв'язку з іншими спеціальними дисциплінами, обсягу посібника. Важливим є також питання про рівень використання математичного апарату.

У пропонованому посібнику викладено фізичні основи механіки, колювання, хвилі, елементи спеціальної теорії відносності та основи молекулярної фізики і термодинаміки. Матеріал підібрано за чинними програмами з фізики для студентів хімічних та інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Проте посібник написаний так, що ним можуть користуватися студенти природничих факультетів, опускаючи без шкоди для цілісного сприймання і розуміння основного матеріалу параграфи посібника, теми яких виходять за межі їхньої програми курсу фізики. Окремих читачів можуть зацікавити додатково введені параграфи, де розглянуто поняття про тензор інерції, система координат центра мас, закони збереження в найпростіших хімічних реакціях та деякі інші.

З власного багаторічного досвіду викладання курсу фізики на хімічному та природничих факультетах Львівського національного університету імені Івана Франка автор намагався викласти матеріал у стислій формі, особливу увагу приділити фізичному аналізу понять і сутності законів природи та їхній інтерпретації, а також наочності у поясненнях конкретних явищ з використанням відповідного математичного апарату. Наведено приклади застосування законів фізики у техніці й господарстві, розглянуто зв'язок фізики з іншими дисциплінами. Це дасть змогу студентам отримати обсяг знань з фізики, необхідний для вивчення їхніх спеціальних курсів.

Кожен розділ книги починається коротким узагальненим формулюванням його основної ідеї і закінчується контрольними запитаннями, прикладами розв'язування задач та задачами для

самостійного розв'язування. Це допоможе читачеві перевірити рівень засвоєння матеріалу та ступінь підготовки з фізики.

Автор вдячний рецензентам посібника, особливо професорові Богдану Лукіяню, за доброзичливі зауваження, а також завідувачу кафедри фізичної і біомедичної електроніки, професорові Зиновію Стасюку за сприяння в роботі над книгою та співробітникам кафедри Ігореві Кухарському і Наталії Гладкій за допомогу в оформленні рукопису.

ВСТУП

1. Предмет фізики та її зв'язок з іншими науками і технікою

Фізика – наука про найпростіші і водночас найзагальніші закономірності явищ природи, про властивості та структуру матерії. Це головню експериментальна наука, яка ґрунтується на практиці, спостереженнях і дослідях. Експериментальні факти систематизують, аналізують та осмислюють – таким є науковий метод дослідження. Виявлені під час дослідів закономірності використовують для побудови фізичних теорій, які узагальнюють і упорядковують результати дослідів, відображаючи об'єктивні закони природи у найпростіших термінах.

Фізична теорія виникає з гіпотези – моделі, яку поступово видозмінюють і вдосконалюють; після перевіряння на нових дослідях і доведення, вона стає теорією. Добра теорія пояснює експериментальні факти про явища і, крім того, правильно передбачає результати нових експериментів. Вона повинна бути загальною і точною, бо фізика – наука точна і повинна мати змогу удосконалюватися. Експериментально відкриті і теоретично обґрунтовані зв'язки між фізичними явищами стають фізичними законами. Природною мовою фізики є математика.

Немає єдиної всеосяжної теорії всіх фізичних явищ, є багато різних теорій, кожна з яких має свою, обмежену сферу застосування. Закони Ньютона – фундамент класичної механіки – стосуються макроскопічних тіл, що рухаються зі швидкостями, значно меншими від швидкості світла; спеціальна теорія відносності Айнштейна описує рух тіл зі швидкостями, близькими до швидкості світла (релятивістська фізика); у галузі мікросвіту діє квантова механіка. Нові експерименти ведуть до створення нової теорії, яка повинна бути загальнішою і містити попередню як окремий випадок.

Всеосяжність фізичних законів сприяє розвитку інших суміжних з фізикою наук, таких як хімія, біологія, геологія. Наприклад, відкриття квантової теорії дало змогу хімікам ліпше

усвідомити факти про хімічну будову речовини, розкрити природу хімічних реакцій, створити теорію хімічного зв'язку. Закони поширення звуку в твердих тілах допомогли геологам створити методи дослідження земних надр, теорія руху газових потоків – збагатити метеорологію й океанографію, рентгенофізика – розшифрувати структури ДНК, білкових сполук, визначити форму і розміри вірусів. Отже, розвиток фізики приводить до появи нових понять, теорій, до створення нових технологій, приладів, нових методів дослідження у різних галузях науки і техніки.

На розвиток фізики впливали також інші науки, наприклад, астрономія, хімія, філософія, що сприяло встановленню таких законів фізики, як теорія всесвітнього тяжіння, атомна будова речовини, закон збереження енергії тощо. Усі природничі науки взаємопов'язані, однак місце фізики особливе у тому сенсі, що вона, досліджуючи загальні закони природи, створює основу для вивчення складніших закономірностей, які є об'єктом досліджень інших природничих наук.

Фізика виросла з потреб практики, відкриття в фізиці мали важливе значення для створення нових галузей техніки, на її фундаменті виросли приладобудування, електронна й обчислювальна техніка, ядерна техніка та ін. Сучасні кадри інженерів, хіміків, біологів, лікарів систематично користуються фізичними методами дослідження, застосовують фізичні прилади у практичній роботі. Немає такої галузі нашої життєдіяльності, де б не застосовували досягнення фізики.

2. Одиниці фізичних величин та їхні розмірності

Люди вже давно навчилися вимірювати різні величини. Для точних фізичних вимірювань потрібно було створити систему одиниць фізичних величин – сукупність одиниць, які можна було б чітко визначити і відтворити. Між різними фізичними величинами є зв'язок, що дає змогу виразити одні фізичні величини через інші. Тому було вирішено розділити одиниці фізичних величин на основні і похідні. У механіці основними є одиниці довжини, часу і маси.

Одиницею довжини є **метр**, який спочатку визначено як 10^{-7} відстані від екватора до Північного полюса вздовж меридіана, що проходить через Париж. Для зручності відтворювання в 1889 р. метр офіційно визначено як відстань між двома паралельними

позначками, нанесеними на платино-іридієвому бруску. Цей еталон зберігається в Міжнародному бюро мір і ваги біля Парижа, а його копії – у національних службах стандартів по всьому світі.

Проте для багатьох наукових цілей точність вимірювань, що ґрунтуються на такому еталоні одиниці довжини, виявилась недостатньою. Крім того, порівняння довжин за допомогою бруска не вигідне. Тому 1961 р. прийнято природну одиницю довжини, виведену на тому, що метр можна відобразити через довжини світлових хвиль, випромінюваних атомом. Таке випромінювання можна легко відтворити в лабораторії і виміряти. Один метр – це 650 763,73 довжини хвилі оранжевої лінії криптону-86. Ця одиниця метра в 100 разів точніша від попереднього еталона. З огляду на великі успіхи в методиці вимірювання часу квантовими годинниками 1975 р. введено нову одиницю довжини, яка ґрунтується на тому, що швидкість поширення світла в вакуумі є сталою. Один метр дорівнює відстані, яку проходить плоска світлова хвиля у вакуумі за $1/299\,792\,458$ частки секунди. Тут число 299 792 458 – це швидкість світла у вакуумі, виражена в метрах за секунду.

Особливість **еталона часу** та, що його можна застосовувати лише один раз, тому його одиницею повинен бути процес, який регулярно повторюється. Спочатку одиниця часу ґрунтувалась на русі Землі, і її еталоном слугувала секунда – $1/86\,400$ частки середньої сонячної доби. Проте, як виявилось, швидкість добового обертання Землі з часом змінюється приблизно на 10^{-8} с за рік. Тому 1967 р. прийнято природну фізичну одиницю часу – одну секунду, яку визначають як тривалість $9\,192\,631\,770$ періодів стандартних коливань випромінювання цезію-133. Точність порівняння часових інтервалів тут сягає 10^{-12} с (інакше кажучи, помилка в 1 с становитиме під час вимірювання інтервалу часу до 30 000 років). Сьогодні є методи точного вимірювання кількості коливань стандартного випромінювання атомів цезію, які припадають на заданий інтервал часу, що дає змогу градувати вторинні еталонні годинники.

Еталон одиниці маси не має природного прототипа, який можна було б легко відтворювати, як це маємо для еталонів довжини і часу. Нема точного методу для його відображення і використання на рівні індивідуальних атомів і молекул. Тому за міжнародний еталон маси в 1 кг слугує циліндр зі сплаву платини та

іридію діаметром і висотою 39 мм. Він зберігається у Міжнародному бюро мір і ваги біля Парижа.

Кожна фізична величина має свою **розмірність**, яка характеризує природу вимірюваної величини і збігається з розмірністю одиниці вимірювання цієї величини. Повсючасно розмірність позначають цією ж буквою, що й саму фізичну величину, але взяту в квадратні дужки. Якщо, наприклад, фізичною величиною є довжина, то її розмірність позначають так: $[l]=L$. Розмірність швидкості – $[v]=L/T=LT^{-1}$, що випливає з виразу $l=vt$. У формулах обчислення фізичних величин треба завжди зазначати їхні одиниці, розмірності яких у лівій і правій частин рівняння повинні збігатися.

3. Вектори та їхні властивості

Фізичні величини (маса, час, об'єм, швидкість, імпульс, сила) поділяють на скаляри і вектори. **Вектором** називають величину, яку характеризують числовим значенням і напрямом у просторі. Графічно вектор зображають дещо жирнішою буквою **A** або буквою зі стрілкою зверху $\vec{A}$. Абсолютну величину вектора позначають $|A|$ або просто A . Вектори є колінеарними, якщо вони спрямовані уздовж паралельних прямих в один або протилежні боки. Вектори рівні, якщо вони паралельні один до одного, направлені в один бік і їхні абсолютні значення (модулі) однакові.

У фізиці багато законів, які записують за допомогою дій над векторами, наприклад, додаванням, відніманням, множенням вектора на число, скалярного і векторного множення векторів тощо. Розглянемо деякі операції з векторами.

Додавання векторів. Вектори додають геометрично: сума двох векторів дорівнює діагоналі паралелограма, сторонами

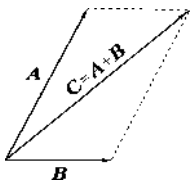


Рис. 1. Додавання двох векторів

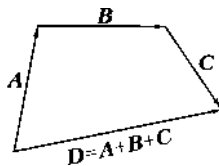


Рис. 2. Інший метод додавання векторів

якого є вектори, які додають (рис. 1):

$$A + B = C.$$

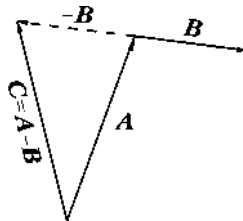
Додати вектори можна й іншим способом, сполучивши початок другого вектора з кінцем першого. Цей спосіб дуже зручний у випадку додавання декількох векторів. У результаті буде ламана лінія. Вектор, який сполучає початок першого вектора з кінцем останнього є підсумковим вектором (рис. 2).

Віднімання векторів. Операцію віднімання вектора B від вектора A зводять до дії додавання вектора $(-B)$ до вектора A :

$$A - B = A + (-B) = C.$$

На рис. 3 вектор C виражає різницю векторів $A - B$.

Рис. 3. Вектор C є різницею векторів A і B



Добуток вектора на число. Добутком вектора A на число k називають вектор

$$B = kA,$$

що паралельний (колінеарний) до вектора A і модуль якого дорівнює добуткові модуля $|A|$ на число k .

Розкладання векторів на складові. Будь-який вектор можна розкласти на складові, сума яких дорівнюватиме початковому вектору. На площині вектор можна зобразити як суму двох складових (див. рис. 1.1).

Проекції вектора на осі декартової системи координат. Обчислення з векторними величинами часто простіше виконувати, якщо їх зобразити за допомогою складових за певними напрямками, наприклад, за осями декартової прямокутної системи координат.

Виберемо на площині прямокутну систему координат x, y (рис. 4). Довільний вектор $\mathbf{A}$, який лежить у цій площині, можна записати як суму

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y,$$

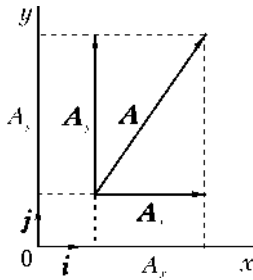


Рис. 4. Проекція вектора $\mathbf{A}$ на координатні осі

де $\mathbf{A}_x$ – вектор, напрямлений паралельно до осі x ; $\mathbf{A}_y$ – вектор, напрямлений паралельно до осі y .

З іншого боку, як видно з рис. 4, модулі складових векторів $\mathbf{A}_x$ і $\mathbf{A}_y$ дорівнюють

проекціям вектора $\mathbf{A}$ на відповідні координатні осі. Проекції вектора на осі позначають тими ж буквами, що й

складові, не виділяючи шрифтом. Складові вектора і його проекції на відповідні осі пов'язують між собою за допомогою одиничних векторів (ортів), напрямлених за осями координат. Одиничний вектор $\mathbf{i}$ – це безрозмірний вектор, спрямований уздовж позитивного напрямку осі x , довжина якого дорівнює одиниці, $\mathbf{j}$ – одиничний вектор уздовж позитивного напрямку осі y . Тоді для вектора $\mathbf{A}$ можна записати

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j},$$

а його модуль

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

У загальному випадку, коли вектор не лежить у площині xy , а довільно розташований у просторі, міркуючи аналогічно і ввівши одиничний вектор $\mathbf{k}$ уздовж осі z у просторовій прямокутній системі координат з трьома взаємно перпендикулярними осями x, y, z , вектор $\mathbf{A}$ можна виразити через його складові так:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

Модуль вектора $\mathbf{A}$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Отже, вектор у просторі визначений трьома незалежними числами.

Скалярний добуток векторів. Є два головні види добутків векторів: скалярний і векторний. Операції ділення вектора на вектор не існує. Скалярним добутком C двох векторів A і B називають добуток модулів цих векторів на косинус кута α між ними:

$$C = (AB) = AB \cos \alpha.$$

Скалярний добуток позначають (AB) або просто AB . Величина C – скаляр.

Під квадратом вектора розуміють скалярний добуток вектора самого на себе:

$$A^2 = A^2.$$

Скалярний добуток векторів має властивість комутативності. Це означає, що добуток не залежить від порядку розташування співмножників:

$$(AB) = (BA).$$

Векторний добуток векторів. Векторним добутком векторів A і B називають вектор C , що перпендикулярний до обох векторів A та B і модуль якого дорівнює добуткові модулів векторів $|A|$ та $|B|$ на синус кута α між ними. Векторний добуток позначають так:

$$C = [AB] = A \times B,$$

а його модуль

$$|C| = |A||B| \sin \alpha = AB \sin \alpha.$$

Напрямок вектора C визначають за правилом свердлика. Якщо свердлик (з правим гвинтом) зорієнтувати так, щоб його вісь була перпендикулярна до площини Π , у якій лежать вектори A та B , й обертати ручку свердлика від вектора A до вектора B за найкоротшим шляхом згідно з їхнім розташуванням у

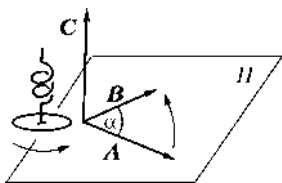


Рис. 5. Застосування правила свердлика до визначення напрямку вектора C , який дорівнює векторному добутку векторів A і B

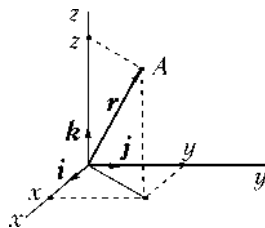


Рис. 6. Радіус-вектор r точки A

формулі векторного добутку, то поступальний рух самого свердлика відбуватиметься у напрямі вектора C (рис. 5).

На відміну від скалярного, векторний добуток векторів, не має властивості комутативності, після переставляння співмножників напрям підсумкового вектора зміниться на зворотний:

$$[AB] = -[BA].$$

Для всіх видів множення векторів виконується закон дистрибутивності, тобто добуток суми векторів дорівнює сумі добутків доданків, узятих попарно, наприклад, для скалярного добутку векторів маємо

$$(A, B + C) = (AB) + (AC),$$

або у випадку векторного добутку –

$$[A, B + C] = [AB] + [AC].$$

Радіус-вектор. Розташування точки в просторі зручно визначати за допомогою радіуса-вектора. Радіусом-вектором точки A називають вектор r , проведений з початку системи відліку у цю точку A (рис. 6). Його проекції на координатні осі дорівнюють декартовим координатам точки

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

За допомогою одиничних векторів радіус-вектор можна виразити так:

$$r = xi + yj + zk,$$

а його модуль

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

ЧАСТИНА I

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Розділ 1

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА

Дослідження нашого реального світу спочатку було спрямоване на вивчення форм найпростішого руху – механічного. Систематичне дослідження інших, складніших явищ природи, ґрунтується на ідеї руху, тому послідовне вивчення фізики завжди починають з механіки, яка описує переміщення тіл або їхніх частин у просторі. В основі класичної механіки є закони Ньютона.

Механіку поділяють на три розділи: кінематику, динаміку і статику.

У кінематиці розглядають переміщення тіл залежно від часу без урахування причин, які зумовлюють рух або його зміну, тобто методику опису різних форм простих рухів.

Динаміка вивчає взаємодію тіл, тобто причину, яка приводить до зміни руху.

Статика розглядає умови рівноваги тіл у стані спокою. Вона є частинним випадком динаміки.

1.1. Механічний рух

Механічним рухом називають зміну положення тіла щодо інших тіл у просторі з плином часу. Щоб описати рух тіла, потрібно знати рух кожної його точки, бо різні точки протяжного тіла можуть рухатися по-різному. Тому, перш ніж перейти до опису руху тіла, потрібно визначити способи опису руху окремої точки.

У фізиці послуговуються різними абстракціями, наприклад, поняттям матеріальної точки. **Матеріальна точка** – це тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати. Така схематизація допустима у багатьох задачах механіки тоді, коли

форма і розміри тіла не суттєві. Є ще одна абстракція у механіці – **абсолютно тверде тіло**, яке будемо розуміти як *систему матеріальних точок, взаємне розташування яких незмінне*. Таке тіло у цілому завжди зберігає свою форму.

Рух тіла відносний. Тому, щоб його описати, треба визначити щодо яких інших тіл його розглядають. *Групу нерухомих одне стосовно іншого тіл, які використовують для визначення положення рухомих тіл, називають системою відліку*. Із системою відліку пов'язують час і відповідну систему координат. Найчастіше користуються декартовою (прямокутною) системою координат.

Неперервну послідовність точок простору, через які проходить матеріальна точка під час руху називають траєкторією точки. Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний і криволінійний рухи тіл. *Відстань, виміряну вздовж траєкторії, яку проходить рухома точка з моменту початку відліку часу, називають пройденим шляхом*.

1.2. Способи опису руху точки

Описати рух матеріальної точки означає визначити її положення в просторі у довільний момент часу. Це можна зробити різними способами. Розглянемо їх на прикладі руху матеріальної точки по колу.

1. Координатна форма – це такий спосіб, коли рух матеріальної точки описують рівнянням, де визначено, як кожна координата залежить від часу. Наприклад, рух якоїсь матеріальної точки у площині (рис. 1.1) можна задати такими рівняннями:

$$x = R(1 + \cos \omega t);$$

$$y = R \sin \omega t,$$

де R і ω – сталі величини. Щоб знайти рівняння траєкторії, перепишемо ці рівняння так:

$$x - R = R \cos \omega t;$$

$$y = R \sin \omega t.$$

Піднесемо обидві сторони рівнянь до квадрата і додамо:

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2.$$

Це рівняння кола з центром у точці $(x = R, y = 0)$.

2. Векторна форма. Цей спосіб не потребує якоїсь системи координат, положення точки характеризують за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r}$, проведеного від тіла відліку до рухомої точки. Під час руху точки її радіус-вектор весь час може змінюватися як за модулем, так і за напрямом, рівняння руху в цьому випадку записують так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Цей спосіб опису руху точки застосовують у теорії, коли виводять формули, а в кінці вводять систему координат і за проєкціями радіуса-вектора на осі координат знаходять кінематичні рівняння руху. Наприклад, радіус-вектор деякої частинки змінюється з часом за таким законом (рис. 1.2):

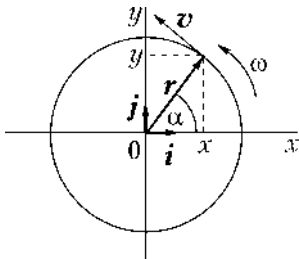


Рис. 1.2. Векторна форма запису руху точки по колу

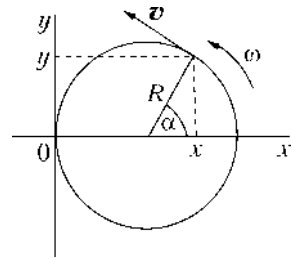


Рис. 1.1. Координатна форма запису руху точки по колу

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

де

$$x(t) = R \cos \omega t;$$

$$y(t) = R \sin \omega t.$$

Це параметричне рівняння кола, де параметром є час.

3. Опис руху точки за допомогою параметрів траєкторії. Його застосовують тоді, коли траєкторія точки задана наперед. Описати такий рух точки можна за допомогою лише однієї скалярної величини (параметра), наприклад, шляху

$$s = s(t),$$

який визначає положення точки на заданій траєкторії у довільний момент часу. На траєкторії треба лише вибрати початок відліку руху і його напрям.

Вибір способу опису руху точки залежить від конкретного завдання, яке ставимо перед собою.

1.3. Швидкість

Швидкість матеріальної точки – це фізична величина, яка характеризує зміну місця розташування матеріальної точки з часом, тобто визначає темп і напрям руху точки у кожний момент часу.

Розглянемо параметричний запис руху точки. Якщо рух рівномірний, тобто точка за будь-які однакові малі інтервали часу проходить однакові відрізки шляху i , отже, швидкість стала, то для модуля вектора швидкості маємо

$$v = \frac{s}{t},$$

де s – шлях, пройдений точкою за час t .

Якщо рух нерівномірний, то для його характеристики вводять поняття шляхової **середньої швидкості** $\langle v \rangle$, яка визначена відношенням приросту шляху Δs , пройденого точкою, до інтервалу часу Δt , за який пройдено цей шлях, тобто

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Застосуємо векторну форму запису руху, яка особливо зручна для опису криволінійного руху. Нехай точка рухається вздовж кривої траєкторії AB (рис. 1.3). Її положення у моменти часу t_1 і t_2 визначають радіуси-вектори r_1 і r_2 ; Δr – це **вектор переміщення** точки, тобто *напрявлений відрізок, який показує, куди і на скільки змістилась точка за час Δt* . Для вектора середньої швидкості переміщення запишемо

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Проте модуль вектора середньої швидкості переміщення не дорівнює середній шляховій швидкості, бо, наприклад, для криволінійного руху

$$\Delta s \neq |\Delta r|.$$

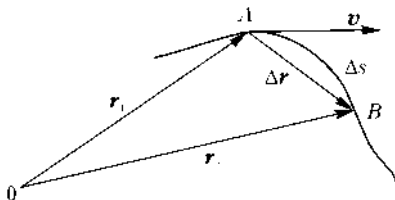
А втім, якщо значення цих величин малі, то різниця між ними невелика.

Середня швидкість залежить від Δt і для кожного інтервалу часу вона різна.

Рух у конкретний момент часу характеризує миттєва швидкість $\mathbf{v}$. **Миттєва швидкість** – це межа, до якої прямує середня швидкість, коли Δt прямує до нуля:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Рис. 1.3. Характеристика середньої та миттєвої швидкостей точки



З математики відомо, що межа відношення хорди до дуги дорівнює одиниці, якщо кут, на який опирається дуга, прямує до нуля:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = 1.$$

Тому для модуля миттєвої швидкості

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.2)$$

З формули (1.2) випливає, що вектор швидкості $\mathbf{v}$ спрямований по дотичній до траєкторії у заданій точці, бо похідна ds/dt дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої у цій точці.

Уведемо декартову систему координат з початком у точці O і перепишемо формулу (1.1). Оскільки швидкість – вектор, то його можна записати через проекції на координатні осі:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}.$$

Отже,

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

Для модуля швидкості маємо таку формулу:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Для зворотної задачі, коли задано швидкість і треба знайти шлях точки, з формули (1.2) отримуємо

$$ds = v dt.$$

Інтегруючи цей вираз, знайдемо шлях, який проходить точка за час t :

$$s = \int_0^t v(t) dt.$$

1.4. Прискорення

Якщо під час руху точки швидкість змінюється, то її зміну характеризують прискоренням. **Середнє прискорення** – це відношення зміни швидкості до інтервалу часу, за який відбулась ця зміна:

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Миттєве прискорення – це межа, до якої прямує середнє прискорення, якщо Δt прямує до нуля. Його вводять так:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}},$$

або

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Спочатку знайдемо зміну швидкості за час Δt . Нехай матеріальна точка рухається по кривій AB ; у момент часу t вона була в точці A і мала миттєву швидкість $\mathbf{v}$ (рис. 1.4).

Через інтервал часу Δt ця точка перемістилася в точку B і набула миттєвої швидкості $\mathbf{v}_1$. Для порівняння швидкостей перенесемо вектор швидкості $\mathbf{v}_1$ паралельно до нього у спільну точку

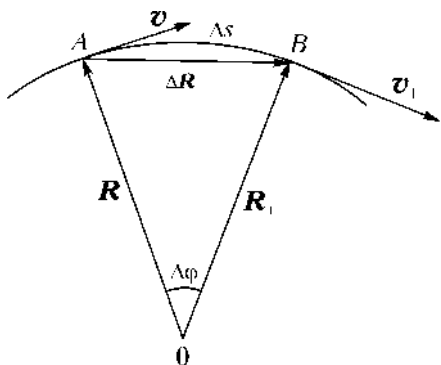


Рис.1.4. Зміна швидкості у прискореному русі

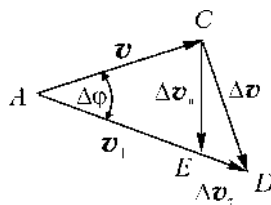


Рис. 1.5. Вектор зміни швидкості $\Delta \mathbf{v}$ має дві складові: $\Delta \mathbf{v}_\tau$ і $\Delta \mathbf{v}_n$

A (рис. 1.5). Тут різницю швидкостей $\Delta \mathbf{v}$ відобразатиме вектор $\vec{CD}$. На векторі $\mathbf{v}_1$ відкладемо модуль вектора $|\mathbf{v}|$ й отримаємо відрізок AE . Сполучимо кінець вектора $\mathbf{v}$ (точку C) з точкою E , тоді відрізок ED буде характеризувати зміну швидкості за модулем Δv_n , а відрізок CE – зміну швидкості за напрямом Δv_n за проміжок часу Δt . Отже, (див. рис. 1.5) зміну швидкості $\Delta \mathbf{v}$ за час Δt можна записати у вигляді двох доданків:

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_\tau.$$

Тоді для загального миттєвого прискорення отримуємо вираз

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t},$$

де

$$|\Delta \mathbf{v}_\tau| = \Delta |\mathbf{v}| = v_1 - v.$$

Як бачимо, прискорення точки має дві складові: тангенціальну і нормальну. Модуль **тангенціального** прискорення

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt},$$

а для вектора тангенціального прискорення отримуємо формулу

$$\mathbf{a}_\tau = \tau \frac{d|\mathbf{v}|}{dt},$$

де τ – одиничний вектор у напрямі дотичної до траєкторії.

Тангенціальне прискорення характеризує зміну вектора швидкості за модулем і спрямоване по дотичній до траєкторії в бік зростання швидкості або в протилежний бік залежно від того, зростає чи спадає швидкість за модулем.

Визначимо **нормальне прискорення** a_n . Уважатимемо, що кут $\Delta\varphi$, на який повернувся радіус-вектор точки $\mathbf{R}$ за час Δt , малий, тому шлях Δs можна вважати дугою кола, радіусом R , оскільки можна довести таке: якщо довжина дуги прямує до нуля, то форма траєкторії між точками A і B прямує до кола, яке називають колом кривини, а його радіус – радіусом кривини. У такому разі можна скористатися подібністю трикутників CAE (див. рис. 1.5) і AOB (див. рис. 1.4): вони подібні як трикутники із взаємно перпендикулярними сторонами. Тут $\vec{AB} = \Delta\mathbf{R}$ є переміщення

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}, \quad \Delta R = |\Delta\mathbf{R}| = AB,$$

де R – радіус кривини траєкторії. Отже,

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta R} = \frac{v}{R},$$

звідки

$$\Delta v_n = \frac{v \Delta R}{R}.$$

Для a_n маємо

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{R} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{v^2}{R},$$

бо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = v.$$

Напрямок вектора нормального прискорення $\mathbf{a}_n$ знайдемо так. Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то $\Delta\varphi \rightarrow 0$, а це означає, що й кут CAE прямує до нуля. Оскільки трикутник CAE рівнобедрений, то кут між AC і

СЕ прямує до $\pi/2$. Отже, вектор $\mathbf{a}_n$ перпендикулярний до вектора швидкості $\mathbf{v}$ і для нормального прискорення маємо

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{n} \frac{v^2}{R},$$

де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор, напрямлений до центра кривини по нормалі до траєкторії точки. Вектор загального прискорення виразимо такою формулою:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n = \tau \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} + \mathbf{n} \frac{v^2}{R}.$$

Модуль вектора загального прискорення $|\mathbf{a}|$ можна записати через модулі тангенціального і нормального прискорення:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d|\mathbf{v}|}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

У рівноприскореному русі $a = \text{const}$ і швидкість $v = at$, тому шлях, пройдений тілом за час t ,

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t at dt = \frac{at^2}{2}.$$

Якщо в початковий момент часу тіло мало швидкість v_0 , то швидкість у довільний момент часу t

$$v = v_0 + at,$$

і для шляху отримуємо формулу

$$s = \int_0^t v dt = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

1.5. Кінематика твердого тіла

Рух матеріальної точки описують трьома функціями, які характеризують залежність координат точки від часу. Щоб описати рух N незалежних матеріальних точок, треба знати $3N$ таких рівнянь. *Кількість незалежних координат, які визначають по-*

положення тіла у просторі називають **числом ступенів вільності**. Це кількість незалежних одне від одного можливих переміщень, кожне з яких описує своя координата. Матеріальна точка має три ступені вільності. Бувають, проте, випадки, коли рух точки обмежений певним способом. Наприклад, якщо дві матеріальні точки жорстко з'єднані між собою, то така система має п'ять ступенів вільності, бо між координатами закріплених точок існує зв'язок:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

де l – відстань між точками. Частинка, рух якої обмежений поверхнею, має два ступені вільності, а точка, яка може рухатися по колу чи довільній кривій, – лише один, бо положення точки можна задати тільки одним числом – довжиною частини кривої від фіксованої точки.

Щоб визначити положення твердого тіла, достатньо знати координати трьох його точок, що не лежать на одній прямій. Між дев'ятьма координатами цих точок існує три співвідношення, які виражають відстань між трьома точками, тому число ступенів вільності твердого тіла є шість. Цими шістьма числами можуть бути три прямокутні координати, що характеризують поступальний рух уздовж трьох осей координат, і три кути, які характеризують обертання твердого тіла навколо цих осей координат. Система, що складається з N частинок, між якими є K зв'язків, має $(3N - K)$ ступенів вільності.

Будь-який рух твердого тіла можна трактувати як комбінацію поступального й обертального рухів.

Поступальний рух твердого тіла – це такий рух, коли всі його точки описують однакові траєкторії, будь-яка пряма, що сполучає довільні дві точки твердого тіла, переміщується паралельно сама до себе. Рух такого тіла задають рухом довільної його точки. **Плоский рух** твердого тіла характерний тим, що траєкторії його точок лежать у паралельних площинах (рух тіла по площині).

Обертальний рух навколо нерухомої осі – це рух, коли всі точки тіла рухаються по колах з центрами на осі обертання. Це плоский рух твердого тіла. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки, в загальному випадку, досить складний.

1.6. Кутова швидкість. Кутове прискорення

Кутова швидкість. Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі (рис. 1.6). Таке тіло має один ступінь вільності і його рух описує одна змінна координата – кут повороту φ .

Нехай за проміжок часу Δt тіло повернулося на кут $\Delta\varphi$. Кутовою швидкістю називають вектор, який визначають так:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тут $\Delta\varphi$ – вектор, модуль якого дорівнює елементарному кутові повороту, а напрям збігається з поступальним рухом осі правого гвинта, який обертається по колу в напрямі руху довільної точки твердого тіла. У вигляді векторів можна відображати лише нескінченно малі кути, бо кінцевих розмірів кути-вектори не підпорядковувалися б правилам векторного додавання, зокрема комутативності.

Вектори, напрям яких пов'язують з напрямом обертання тіла, називають **псевдовекторами**, або **аксіальними** векторами, вони не мають точки прикладання і розташовані вздовж осі обертання. Кутова швидкість – це псевдовектор, вона характеризує не лише швидкість обертання, а й орієнтацію осі обертання у просторі і напрям обертання тіла (див. рис. 1.6). Одиницею кутової швидкості є радіан за секунду (рад/с).

Один радіан за секунду – це така кутова швидкість рівномірного обертального руху тіла, коли тіло обертається на кут один радіан за одну секунду. Якщо обертання рівномірне, тобто $\omega = \text{const}$ і час $t = T$, де T – період обертання, то за один оберт $\varphi = 2\pi$. Тоді

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

де ν – лінійна частота обертання.

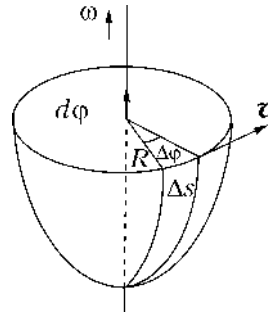


Рис. 1.6. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Знайдемо зв'язок кутової швидкості тіла ω з лінійною швидкістю v довільної його точки, що перебуває на відстані R від осі обертання. Лінійна швидкість точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

У векторній формі

$$\mathbf{v} = [\omega \mathbf{R}].$$

де $\mathbf{R}$ радіус-вектор точки відносно осі обертання.

Кутове прискорення. Якщо $\omega = \omega(t)$, тобто обертання тіла нерівномірне, то зміну кутової швидкості характеризують кутовим прискоренням β :

$$\beta = \frac{d\omega}{dt}.$$

Величина β – псевдовектор, який у прискореному обертанні збігається з вектором ω а у сповільненому – протилежний до ω . Кутове прискорення точки β пов'язане лише з лінійним тангенціальним прискоренням a_τ точки:

$$a_\tau = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \beta R, \quad (1.3)$$

або у векторній формі:

$$\mathbf{a}_\tau = [\beta \mathbf{R}].$$

Як бачимо, кутова швидкість і кутове прискорення для всіх точок обертового твердого тіла однакові, а лінійна швидкість і лінійне прискорення збільшуються пропорційно до відстані точки від осі обертання.

Нормальне прискорення точки a_n можна виразити через кутову швидкість обертального руху ω :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Отже, нормальне прискорення точки прямо пропорційне добуткові квадрата кутової швидкості на радіус кривини траєкторії.

Контрольні запитання

1. Що називають системою відліку?
2. Які Ви знаєте способи опису руху точки?
3. Що таке швидкість точки?
4. Яка формула загального прискорення точки?
5. Який рух твердого тіла називають поступальним?
6. Що характеризує вектор кутової швидкості?
7. Які вектори називають аксіальними?

Приклади розв'язування задач

- 1.1.** Тіло пройшло першу половину шляху зі швидкістю $v_1=5$ м/с, другу – зі швидкістю $v_2=7$ м/с. Визначте середню швидкість тіла на шляху s .

Розв'язування. Середня шляхова швидкість тіла

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s}{t_1 + t_2};$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{\frac{1}{2}s}{v_2}.$$

Отже,

$$\langle v \rangle = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow \langle v \rangle = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{5 + 7} = 5,8 \text{ м/с.}$$

- 1.2.** Автомобіль повертає праворуч, рухаючись по дузі радіусом $R=50$ м упродовж $t=25$ с. Знайдіть модуль вектора середньої швидкості переміщення.

Розв'язування.

Модуль вектора середньої швидкості переміщення

$$|\langle \mathbf{v} \rangle| = \frac{|\Delta \mathbf{R}|}{\Delta t}.$$

Зробимо рисунок до задачі (рис. 1.7).

Вектори $\mathbf{R}_1$ і $\mathbf{R}_2$ мають однакові модулі, однак різні напрямки, тому

$$|\Delta \mathbf{R}| = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1| = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R = 1,4 \cdot 50 \text{ м.}$$

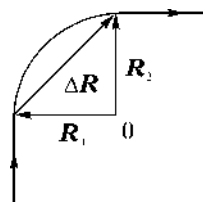


Рис. 1.7.

Отже, для модуля вектора середньої швидкості переміщення отримуємо

$$|\langle \mathbf{v} \rangle| = \frac{|\Delta \mathbf{R}|}{\Delta t} = \frac{1,4 \cdot 50}{25} = 2,8 \text{ м/с.}$$

1.3. З башти кинуто тіло зі швидкістю $v_0 = 10 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Знайдіть швидкість, нормальне і тангенціальне прискорення тіла через 2 с від початку руху тіла.

Розв'язування. Цей криволінійний рух можна трактувати як суперпозицію двох рухів: рівномірного по горизонталі і рівноприскореного по вертикалі. Спочатку знайдемо висоту h , на якій перебуватиме тіло через 2 с:

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad h = 10 \frac{2}{2} - \frac{10 \cdot 4}{2} = 10 - 20 < 0.$$

Отже, тіло перебуває в точці A нижче початку відліку, тобто на спуску (рис. 1.8). Шукаємо швидкість тіла в точці A

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt;$$

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha + g^2 t^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt};$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot gt}.$$

Вважатимемо, що $g = 10 \text{ м/с}^2$. Тоді

$$v = \sqrt{100 + 100 \cdot 4 - 2 \cdot 10 \cdot 0,50 \cdot 10 \cdot 2} = \sqrt{300} = 17,32 \text{ м/с.}$$

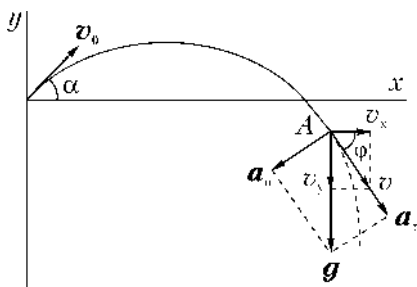


Рис. 1.8.

Визначимо прискорення. Оскільки горизонтальна складова швидкості v_x стала, то горизонтальна складова прискорення дорівнює нулю, тому повне прискорення тіла спрямоване донизу і дорівнює прискоренню вільного падіння. Справді, як видно з рис. 1.8 для нормального прискорення

$$a_n = g \cos \varphi = g \frac{v_x}{v} = g \frac{v_0 \cos \alpha}{v} = 10 \frac{10 \cdot 0,87}{17,32} = 5,0 \text{ м/с}^2.$$

Аналогічно отримуємо для тангенціального прискорення:

$$a_\tau = g \cos(90^\circ - \varphi) = g \sin \varphi = g \frac{v_y}{v} = g \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_\tau = 10 \frac{10 \cdot 0,50 - 10 \cdot 2}{17,32} = \frac{150}{17,32} = 8,66 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{25,20 + 75,00} = \sqrt{100,2} = 10,01 \text{ м/с}^2.$$

1.4. Тіло кинуто під кутом до горизонту. Як змінюються в процесі руху нормальна і тангенціальна складові прискорення (рис. 1.9)?

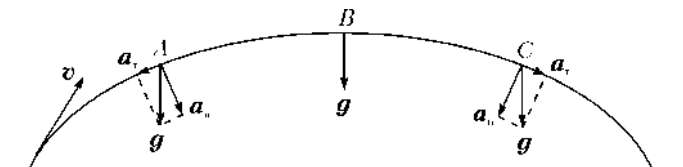


Рис. 1.9

Розв'язування. Під час піднімання тіло рухається сповільнено, тому вектор a_τ напрямлений проти швидкості, а під час падіння – за швидкістю руху. Нормальне прискорення завжди перпендикулярне до вектора швидкості $\mathbf{V}$, а загальне прискорення, як векторна сума векторів a_τ і a_n , у кожній точці траєкторії дорівнює прискоренню вільного падіння $\mathbf{g}$. Це впливає з того, що горизонтальна складова швидкості тіла стала, тому горизонтальна складова прискорення дорівнює нулю.

Задачі

1.1. Камінь кинули вертикально вгору на висоту 10 м. Через який час він упаде на землю? На яку висоту підніметься камінь, якщо початкову швидкість збільшити вдвічі?

Відповідь: $t=2,9 \text{ с}; h_1=4h=40 \text{ м}.$

1.2. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t задано рівнянням $s = A + Bt + Ct^2$, де $A=3 \text{ м}, B=2 \text{ м/с}, C=1 \text{ м/с}^2$. Визначте середню швидкість і середнє прискорення тіла за першу, другу і третю секунди його руху.

Відповідь: $3 \text{ м/с}, 5 \text{ м/с}, 7 \text{ м/с}, a_1=a_2=a_3=2 \text{ м/с}^2.$

1.3. Колесо, обертаючись рівноприскорено, досягнуло кутової швидкості $\omega = 20$ рад/с через $N=10$ обертів після початку руху. Визначте кутове прискорення колеса.

Відповідь: $3,2$ рад/с².

1.4. Автомобіль, рухаючись упродовж 10 с, збільшив швидкість від $v_1 = 30$ км/год до $v_2 = 60$ км/год. Який шлях пройшов автомобіль за час прискорення?

Відповідь: $124,2$ м.

1.5. Ракета стартувала вгору з поверхні Землі з прискоренням $4g$. Яка швидкість ракети під час запуску і якої висоти вона досягла за 10 с?

Відповідь: 350 м/с, 1950 м.

Розділ 2

ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

Наш світ заповнений різними рухомими тілами. Що ж зумовлює їхній рух; його зміну? На ці та інші запитання відповідає динаміка, найважливіший розділ механіки. Основоположником класичної механіки є Ісаак Ньютон. Його праці, опубліковані 1687 р., – це результат спостережень і теоретичних узагальнень як самого Ньютона, так і його попередників (Галілей, Торрічеллі, Гук).

Теорія Ньютона досягла блискучих успіхів у багатьох практичних застосуваннях. Пізніше з'ясували, що вона стосується лише макросвіту і систем, що рухаються з малими швидкостями порівняно зі швидкістю світла. Проте ці обмеження ньютонівської теорії не означають, що вона застаріла чи непотрібна. Майже за всіх обставин закони правильно описують рух фізичних систем.

2.1. Закони Ньютона

Механіка Ньютона ґрунтується на таких принципах: взаємодія між тілами передається миттєво (теорія далекодії); простір є вмістилищем для предметів і не пов'язаний з часом, який сам по собі спливає рівномірно і безвідносно до будь-чого, тобто він є абсолютним, однаковим для всіх систем відліку.

Головні засади класичної механіки відображені у трьох законах Ньютона.

Перший закон Ньютона: *існують такі системи відліку, у яких тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки дія інших тіл не виведе його з цього стану.*

Головне у першому законі Ньютона таке:

а) існування **інерціальних систем відліку** – систем, у яких тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху;

б) стан спокою і рівномірного прямолінійного руху є один стан;

в) зміна стану відбувається внаслідок дії на тіло інших тіл.

За реальних умов цей закон важко перевірити, бо практично неможливо уникнути дії інших тіл на конкретне тіло (притягання тіл до Землі, опору середовища). Проте, абстрагуючи й екстраполюючи результати експериментів у закономірно змінних умовах, можна переконатися, що він з цілковитою достовірністю описує велике коло спостережуваних фактів.

*Здатність тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху називають **інертністю тіл***, а саме це явище – інерцією. Тому перший закон Ньютона називають *законом інерції*, а систему відліку, у якій виконуються закони Ньютона, – інерціальною. Можна довести, що будь-яка система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно стосовно інерціальної, також є інерціальною. Вони є головними системами відліку в механіці.

Другий закон Ньютона. Тіло може змінити свій стан (наприклад, швидкість руху) і набути прискорення лише під час дії на нього іншого тіла. Кількісною мірою дії інших тіл на будь-яке тіло є **сила**. Сила – величина векторна. Внаслідок дії сили тіло набуває прискорення або деформується. Одиницею сили є ньютон. Один ньютон – це така сила, яка, діючи на тіло масою 1 кг, спричинює його прискорення 1 м/с². Різні тіла під час дії на них конкретної сили рухаються з різними прискореннями, тобто чинять різну протидію зміні їхнього стану, виявляючи інертність, а отже, впливають на власне прискорення. Що більша інертність тіла, то менше прискорення спричинює сила цьому тілу. Мірою інертності тіла є **маса**.

Досліди свідчать, що прискорення, якого набуває тіло під час взаємодії з іншим тілом, залежить від сили, яка діє на тіло, і маси тіла:

$$a \sim \frac{F}{m}.$$

Другий закон Ньютона: прискорення, що його набуває тіло під дією сили, прямо пропорційне силі, яка діє на тіло, обернено пропорційне масі тіла і за напрямом збігається з силою. У СІ коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці, тому другий закон Ньютона записують так:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Якщо на якусь матеріальну точку діє кілька сил, то кожна з них надає точці такого прискорення, яке визначене другим законом Ньютона так, ніби інших сил нема. Це називають **принципом незалежності** дії сил. Прискорення, якого набуває тіло внаслідок одночасної дії кількох сил, є таке саме, якби на тіло діяла лише одна сила, що дорівнює векторній сумі всіх сил, що діють. Цю векторну суму називають **рівнодійною силою** і її треба розуміти в застосуванні лише до матеріальної точки. Тоді другий закон Ньютона сформулюємо так: *добуток маси тіла на його прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил, які діють на це тіло.*

Ньютон сформулював цей закон у загальнішому вигляді. Введемо поняття імпульсу тіла:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Імпульсом тіла називають фізичну величину, яка дорівнює добуткові маси тіла на його швидкість.

Другий закон Ньютона стверджує, що швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на тіло:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називають **рівнянням руху** тіла. У класичній механіці $m = \text{const}$, тому з виразу (2.1) випливає:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

тобто

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Отже, останнє рівняння є окремим випадком загального виразу (2.1).

З формули (2.1) отримуємо

$$Fdt = dp.$$

Вираз Fdt називають імпульсом сили. Його зміст полягає в такому: якщо на якесь тіло короткочасно подіяла сила, то зміна імпульсу цього тіла дорівнює імпульсові сили.

Основна задача механіки полягає в тому, щоб, по-перше, знаючи координати і швидкості кожного тіла системи в конкретний момент часу, тобто знаючи стан системи, визначити сили, які спричиняють цей рух; по-друге, знаючи сили, що діють на тіло, визначити закони руху цього тіла. Отже, другий закон Ньютона визначає головні кількісні співвідношення між динамічними і кінематичними характеристиками тіл.

Третій закон Ньютона. Будь-яка дія одного тіла на інше завжди взаємна, у природі нема односторонньої дії, тому **третій закон Ньютона** називають законом дії і протидії. Він стверджує, що *сили, з якими взаємодіють два тіла, однакові за модулем і протилежні за напрямом:*

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Ці сили завжди діють парами, вони однієї природи і прикладені до різних тіл, тому ніколи не зрівноважуються.

Значення цього закону полягає в тому, що він пояснює, звідки береться сила, що є її джерелом. Вона сама собою не існує, а завжди пов'язана з взаємодією тіл. Тобто єдиним джерелом сили, що діє на якесь тіло, є інше тіло. Якщо немає значення, яке саме тіло діє на це конкретне, то кажуть просто, що на тіло діє сила.

У законах Ньютона є дві нові невідомі величини: маса тіла m і сила F . Тому потрібно домовитись, як на досліді визначити хоча б одну з них. Є простий спосіб для визначення одиниці маси. Розглянемо такий дослід: два тіла масами m_1 і m_2 з'єднані пружиною, а пружину стиснено і закріплено (рис. 2.1).

Якщо звільнити пружину, то тіла під дією однакових за модулем, але протилежних за напрямом сил з різними прискореннями розійдуться так, що

$$m_1 a_1 = m_2 a_2,$$

або

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

звідки

$$m_1 = \frac{a_2}{a_1} m_2.$$

Отже, вимірявши прискорення a_1 і a_2 , знаходять відношення мас. Якщо одну з них узяти за еталон, то можна відшукати іншу.

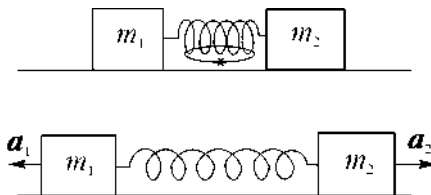


Рис. 2.1. Порівняння мас двох тіл

2.2. Принцип відносності Галілея

Під час дослідження законів механіки постає питання про вигляд рівнянь механіки в різних системах відліку. Доведемо, що рівняння механіки не змінюють свого вигляду внаслідок перетворення координат під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Інакше кажучи, *у всіх інерціальних системах відліку механічні явища за однакових умов відбуваються однаково.*

Справді, порівняємо рівняння руху частинки A масою m у двох інерціальних системах відліку K і K' , які рухаються одна відносно одної зі швидкістю v паралельно до осі Ox (рис. 2.2).

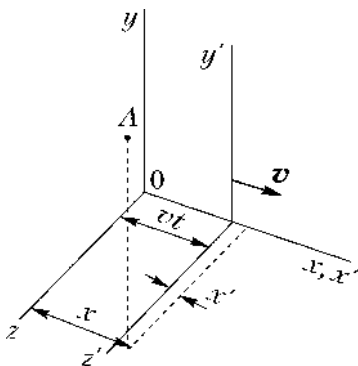


Рис. 2.2. Перетворення системи координат

Припустимо, що в початковий момент часу осі обох систем координат збігалися. Координати точки A у системі K і K' пов'язані між собою такими рівняннями:

$$x = x' + vt; \quad z = z'; \quad (2.2)$$

$$y = y'; \quad t = t'.$$

Ці рівняння називають перетвореннями Галілея. У класичній механіці вважають, що годинники (час) в обох

системах K і K' ходять однаково, і що вони синхронізовані, тобто $t = t'$. Це головне припущення в класичній механіці.

Нехай частинка A рухається. Тоді її швидкість у системі K буде dx/dt . Підставимо сюди значення x з рівняння (2.2):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v,$$

або

$$u_x = u'_x + v.$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt},$$

тобто

$$u_y = u'_y; \quad u_z = u'_z.$$

Запишемо **закон додавання швидкостей** у загальному вигляді:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \quad (2.3)$$

Рівність (2.3) називають **Галілеєвим правилом** додавання швидкостей.

Продиференціювавши за часом рівняння (2.3) ($\mathbf{v} = \text{const}$), отримаємо прискорення частинки:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}'}{dt},$$

або

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'.$$

Отже, прискорення частинки A в обох системах відліку K і K' однакові. Звідси випливає, що

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}',$$

тобто сили

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$$

також однакові:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}',$$

бо маса в класичній механіці не залежить від швидкості.

Рівність сил пояснюють тим, що сила залежить від відстані між частинкою A і тілами, які взаємодіють з нею, а також від швидкостей цих тіл; відстані ж і швидкості в обох системах відліку однакові.

Отже, другий закон Ньютона виконується в усіх інерціальних системах відліку, які рухаються одна відносно іншої зі сталими швидкостями. Він є основним законом механіки, тому отриманий результат означає, що *закони механіки мають однакове формулювання для всіх інерціальних систем відліку*. Це твердження називають **принципом відносності Галілея**.

Якщо якесь рівняння не змінює свого вигляду внаслідок перетворення координат під час переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої, то кажуть, що воно є **інваріантним** стосовно перетворень координат і часу. Інваріантними можуть бути і величини, наприклад, маса, заряд тощо. Отже, можна сказати, що *рівняння механіки інваріантні відносно перетворень Галілея*.

2.3. Система матеріальних точок. Рух центра мас системи

Систему точок називають **замкненою**, якщо точки системи взаємодіють лише між собою і не взаємодіють з точками іншої системи.

Розглянемо закони, яким підпорядкований рух такої системи. Рівняння руху можна дуже спростити, якщо ввести поняття центра мас системи. В однорідному полі сил тяжіння центр мас системи збігається з центром тяжіння. Центром тяжіння називають точку прикладання рівнодійної всіх паралельних сил тяжіння, яка не змінюється під час довільного повороту системи. Для малих твердих тіл силу тяжіння можна вважати системою паралельних сил, дія яких на кожен елементарний об'єм згідно з основним рівнянням динаміки пропорційна до маси в середині цього об'єму. Тому центр мас збігається з центром тяжіння, а відшукання центра мас таких тіл збігається з правилом знаходження центра тяжіння системи точок.

Визначимо розміщення центра мас (і центра тяжіння). Його розташування будемо характеризувати радіусом-вектором R .

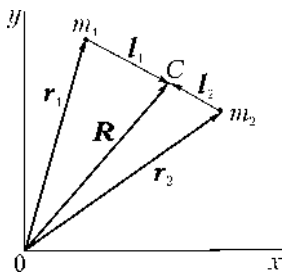


Рис. 2.3. Точка C є центром мас двох матеріальних точок

Розглянемо спочатку систему двох точок з масами m_1 і m_2 (рис. 2.3). Нехай $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ – радіуси-вектори, відповідно, точки 1 і точки 2; $\mathbf{l}_1$ і $\mathbf{l}_2$ – вектори, які характеризують відстань від центра мас системи до точок 1 і 2. Тоді можемо записати такі рівності:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_1;$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_2.$$

Помножимо перше рівняння на m_1 , друге – на m_2 і додамо:

$$\mathbf{R}(m_1 + m_2) = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_1\mathbf{l}_1 + m_2\mathbf{l}_2.$$

Якщо точка C є центром тяжіння, то за правилом важеля

$$l_1 m_1 g = l_2 m_2 g,$$

або у векторному вигляді

$$\mathbf{l}_1 m_1 = -\mathbf{l}_2 m_2.$$

Отже, для $\mathbf{R}$ маємо

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Цей метод можна поширити на систему N точок. Відшукавши центр тяжіння перших двох точок m , знайдемо тим же способом центр тяжіння третьої точки m_3 і точки m , і так далі для всіх N точок. Тоді для радіуса-вектора центра мас системи матимемо формулу

$$\mathbf{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (2.4)$$

У випадку, коли йдеться не про окремі матеріальні точки, а про деяку масу, неперервно розподілену по об'єму зі сталою густиною, положення центра мас визначає вираз

$$\mathbf{R}_c = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} dm,$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор елемента маси dm .

2.4. Швидкість центра мас системи

Припустимо, що система замкнена і під дією внутрішніх сил її точки рухаються з різними швидкостями у різні боки. Знайдемо швидкість центра мас системи. Для цього треба взяти похідну за часом від радіуса-вектора центра мас системи $\mathbf{R}_c$:

$$\mathbf{v}_{цм} = \frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i m_i}.$$

Отже, швидкість центра мас замкненої системи матеріальних точок

$$\mathbf{v}_{цм} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (2.5)$$

де

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i, \quad M = \sum_i m_i.$$

Формулу (2.5) перепишемо так:

$$M\mathbf{v}_{цм} = \mathbf{P}. \quad (2.6)$$

Вираз (2.6) має такий фізичний зміст. Сума імпульсів точок системи $\mathbf{P}$ величина стала для замкненої системи як за значенням, так і за напрямом (див. 5.1), тому швидкість центра мас системи також стала.

Можемо зробити такий висновок: **центр мас замкненої системи матеріальних точок перебуває в стані спокою або рухається прямолінійно зі сталою швидкістю.**

Нехай на систему діють зовнішні сили, рівнодійною на кожну точку яких є $\mathbf{F}_i$. Тоді, очевидно, система буде рухатися з прискоренням. Запишемо рівняння руху системи. За другим законом Ньютона векторна сума всіх сил, що діють на точки системи,

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(M\mathbf{v}_{цм})}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{цм}}{dt} = M\mathbf{a}_{цм}.$$

Отже, рівняння руху системи

$$M\mathbf{a}_{цм} = \sum_i \mathbf{F}_i.$$

Тепер можемо сформулювати **теорему про рух центра мас системи**: якщо на систему матеріальних точок діють зовнішні сили, то центр мас системи рухається так, як рухалася б під дією всіх цих сил матеріальна точка M , маса якої дорівнює сумі мас усіх точок системи.

Тверде тіло – це система матеріальних точок з їхнім незмінним взаємним розміщенням, тому для такого тіла справджуються всі закони, отримані для системи точок.

Дію цього закону можна описати на прикладі польоту снаряду, який у полі тяжіння Землі описує параболу (у вакуумі).

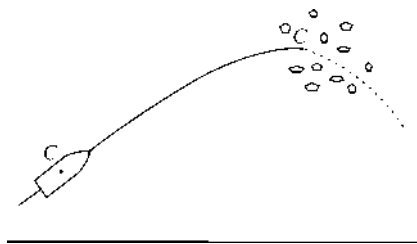


Рис. 2.4. Траєкторія снаряду

Під час польоту снаряд вибухнув (рис. 2.4), осколки розлетілися у різні боки, а центр їхніх мас продовжує рух по параболі. Як бачимо, внутрішні сили (вибух) не можуть змінити руху центра мас.

У деяких обчисленнях, наприклад, коли цікавляться рухом тіл усередині системи, центр мас системи беруть за початок координат системи відліку (система координат центра мас). Обчислення у такій системі координат зручні тим, що тут підсумковий імпульс системи точок завжди дорівнює нулю (бо відкість центра мас у такій системі дорівнює нулю), а тому імпульс точок не враховують.

2.5. Рух тіл змінної маси

У багатьох явищах природи можна спостерігати такі види руху, коли маса тіла, яке рухається під дією сили, змінюється з часом. Це, наприклад, рух ракети, реактивного літака, реактивного снаряда тощо. У таких тілах працюють двигуни, які хімічну енергію пального перетворюють у кінетичну енергію газового струменя, створюючи тягу завдяки реакції викинутої з реактивного сопла маси газу. Під час руху імпульс такого тіла змінюється не лише внаслідок зміни маси тіла і збільшення його швидкості, а й унаслідок виходу з реактивного сопла тіла потоку швидких продуктів згорання.

Знайдемо рівняння руху тіла змінної маси. Для спрощення задачі будемо вважати, що цим тілом є ракета, маса якої на час t була m . За час dt вона зменшилась на dm , а її швидкість v за час dt збільшилась на dv . Позначимо через u швидкість вилітання продуктів згорання відносно ракети. Застосуємо до системи ракета-продукти згорання другий закон Ньютона в загальному вигляді:

$$\frac{dp}{dt} = F,$$

тобто

$$dp = Fdt.$$

Унаслідок витікання з ракети продуктів згорання за час dt імпульс ракети зміниться і буде $(m - dm)(v + dv)$, а імпульс продуктів згорання – $dm(v - u)$. Зміна імпульсу всієї системи за час dt

$$dp = (m - dm)(v + dv) + dm(v - u) - mv = Fdt.$$

Перемножимо члени в дужках і знехтуємо нескінченно малим членом другого порядку $dmdv$, тоді

$$m \frac{dv}{dt} = F + u \frac{dm}{dt}.$$

Це рівняння руху тіла змінної маси називають *рівнянням Мещерського*. У його правій частині член $u \frac{dm}{dt}$ – це *реактивна*

сила, тобто сила, з якою на ракету діють гази, що вилітають з реактивного сопла.

2.6. Види сил. Фундаментальні сили

Усі сили, які існують у природі, можна об'єднати у чотири види фундаментальних сил: гравітаційні, електромагнітні, ядерні та сили слабкої взаємодії.

Гравітаційні – це сили притягання, які діють між усіма тілами і залежать від мас тіл та відстані між ними. Особливість цих сил та, що для малих мас вони виявляються слабо, а для масивних – дуже великі, крім того їхня дія поширюється на значні відстані. Саме цим пояснюють те, що гравітаційні сили найлегше спостерігати у повсякденному житті. Вони підлягають законові всесвітнього тяжіння:

$$F_{gp} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

Електромагнітні сили зумовлені електричною і магнітною взаємодією між електрично зарядженими тілами. Окремий випадок такої взаємодії описує закон Кулона:

$$F_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

Ці сили, як і гравітаційні, зменшуються зі збільшенням відстані за законом обернених квадратів. Отже, обидва види цих сил є далекодійними, тобто діють на будь-якій відстані.

Порівняємо ці сили. Знайдемо відношення кулонівської сили відштовхування до гравітаційної сили притягання для двох електронів:

$$\frac{F_{\ddot{e}\ddot{e}}}{F_{\ddot{a}\ddot{a}}} = \frac{e^2 r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 G m_0^2} \sim 10^{40} ,$$

де m_0 і e – маса і заряд електрона; ϵ_0 і G – електрична і гравітаційна сталі. Як бачимо, електромагнітні сили набагато інтенсивніші від гравітаційних. Тому у взаємодії елементарних частинок гравітаційним притяганням нехтують.

Гравітаційні та електромагнітні взаємодії пояснюють більшу частину явищ природи. Сили взаємодії між атомами, міжмолекулярні, а також сили поверхневого натягу, як і сили пружності й тертя – усі вони зводяться до сил електромагнітної взаємодії. Вони відіграють важливу роль у хімічних і біологічних процесах.

Ядерні сили діють між нуклонами в ядрі, а також між іншими елементарними частинками, це близькодійні сили великої інтенсивності, які виявляються лише на малих відстанях (10^{-15} м).

Сили слабкої взаємодії спричиняють β -розпад частинок, тут вони є єдиними силами; в інших взаємодіях елементарних частинок (крім фотона) вони діють разом з іншими інтенсивнішими силами. Ці сили не здатні створити стійких систем речовини.

Інтенсивність фундаментальних сил оцінюють безрозмірним параметром γ , який характеризує ймовірність процесу, зумовленого цим видом взаємодії.

Для ядерних сил $\gamma = 1$, для електромагнітних $\gamma = 1/137$, для сил слабкої взаємодії $\gamma = 10^{-12}$, для гравітаційних сил $\gamma = 10^{-39}$.

2.7. Сили в механіці. Гравітаційні сили

У механіці вивчають гравітаційні сили, пружні і сили тертя. Розглянемо властивості цих сил.

Гравітаційні сили. *Сукупність сил, розподілених у просторі так, що в кожній точці простору на частинку діє конкретна сила, створюють **силове поле**.* Інакше кажучи, силове поле – це частина простору, в кожній точці якого діє сила, що залежить від розташування цієї точки, тобто від її координат. Саме за допомогою силового поля відбувається взаємодія між тілами. Існують гравітаційне, електричне, магнітне та інші фізичні поля.

Кожне тіло у просторі створює своє гравітаційне поле, яке виявляється у тому, що на будь-яке інше тіло, розташоване в цьому полі, діє сила всесвітнього тяжіння. Для точкових тіл закон у векторній формі виглядає так:

$$\mathbf{F}_{zp} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Це **закон всесвітнього тяжіння**, відкритий Ньютоном. За цим законом *сила притягання між двома матеріальними точка-*

ми прямо пропорційна добутковій масі точок, обернено пропорційна квадратовій відстані між ними і напрямлена по прямій, що сполучає ці точки.

Фізичний зміст гравітаційної сталої G такий: ця величина дорівнює модулю сили притягання між двома тілами масою по 1 кг, що розташовані на відстані 1 м одне від одного.

Хоча закон сформульовано для матеріальних точок, його можна застосовувати і для протяжних тіл, якщо попередньо уявно розбити їх на матеріальні точки, знайти сили взаємодії між цими точками, а потім всі сили взаємодії додати. У такому вигляді цей закон можна також застосовувати до однорідних куль, тоді r – відстань між їхніми центрами мас.

Гравітаційне поле є центральним, тобто прямі, вздовж яких діють сили поля, перетинаються в одній, незакріпленій, нерухомій в інерціальній системі відліку точці – центрі поля сил.

Земля також створює своє гравітаційне поле. Силу, яка діє на будь-яке тіло біля поверхні Землі, називають **силою тяжіння**. Під дією сили тяжіння всі тіла падають на Землю з однаковим прискоренням g (у вакуумі). Для сили тяжіння P згідно з другим законом Ньютона у системі, пов'язаній з полюсами Землі, маємо таку формулу:

$$P = mg.$$

Ця сила завжди діє на будь-яке тіло, у гравітаційному полі Землі, незалежно від того, рухається це тіло чи перебуває у стані відносного спокою.

Загалом сила тяжіння на поверхні Землі не дорівнює гравітаційній, тому що Земля обертається і система координат, пов'язана з Землею неінерціальна. Тут на кожне тіло діє відцентрова сила інерції, спрямована від осі обертання Землі (див. 3.3). Крім того, Земля сплюснута на полюсах. З огляду на це сила тяжіння найбільша на полюсах і найменша на екваторі, тобто прискорення вільного падіння g залежить від географічної широти.

Прискорення вільного падіння залежить також від висоти тіла над поверхнею Землі, тобто від відстані до центра Землі. Якщо ж знехтувати цими чинниками, бо гравітаційна сила не

дуже відрізняється від сили тяжіння, особливо на полюсах Землі, то можемо записати

$$F_{\text{гп}} \approx P,$$

звідки

$$G \frac{mM}{R^2} = mg,$$

і для прискорення вільного падіння біля поверхні Землі отримуємо формулу

$$g = G \frac{M}{R^2},$$

де M – маса Землі, R – її радіус.

Ця формула справджується і для будь-якої іншої планети, коли тіло перебуває на її поверхні або поблизу від неї.

На силу тяжіння може впливати неоднорідний розподіл мас усередині Землі. З огляду на це g може мати різні значення навіть у точках Землі, які розташовані на однаковій географічній широті. Такі невеликі зміни g можна виміряти спеціальними приладами – гравіметрами і на підставі цього з'ясувати наявність у земній корі покладів родовищ корисних копалин.

Вектор $\mathbf{g}$ має ще інший фізичний зміст. Він є силовою характеристикою гравітаційного поля. На будь-яке тіло, розташоване в гравітаційному полі, діє сила тяжіння $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Отже, вектор $\mathbf{g}$ чисельно дорівнює силі, з якою гравітаційне поле діє на пробне тіло масою 1 кг, розміщене в цій точці поля. Зі збільшенням відстані від джерела поля $\mathbf{g}$ зменшується. Точне значення $\mathbf{g}$ потрібне для розрахунку руху супутників Землі і космічних апаратів.

Сила ваги – це сила, з якою тіло розтягує вертикальний підвіс або тисне на горизонтальну опору. Вона виявляється лише тоді, коли на тіло, крім сил тяжіння, діють ще інші сили: натяг підвісу, реакція опори.

Сила ваги залежить від прискорення тіла відносно системи відліку, у якій визначають вагу тіла. Нехай, наприклад, людина перебуває в ліфті, який рухається з прискоренням $\mathbf{a}$ вниз (рис. 2.5). За другим законом Ньютона у системі, пов'язаній із Землею, векторна сума всіх сил, що діють на людину, буде така:

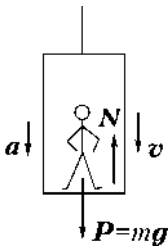


Рис. 2.5. Вага тіла в ліфті, що рухається з прискоренням a вниз $P=m(g-a)$

$$N + P = ma,$$

де m – маса людини; N – реакція опори; P – сила тяжіння, яка діє на людину. Сила ваги людини чисельно дорівнює силі реакції опори, тому для ваги людини P' у ліфті запишемо

$$P' = -N = P - ma = m(g - a),$$

бо сила тяжіння

$$P = mg.$$

Вектори a і g можуть бути напрямлені в один або протилежні боки, відповідно, вага тіла у ліфті буде менша чи більша, ніж тоді, коли ліфт рухається без прискорення відносно Землі ($a = 0$).

Сила тяжіння діє на тіло завжди, а вага виявляється лише тоді, коли під час руху тіла його прискорення $a \neq g$, тобто тіло має опору. Якщо $a = g$, тобто тіло вільно падає, то воно перебуває у стані невагомості.

Будь-яке тіло, яке має вагу, наприклад, лежить на підставці в полі тяжіння, є деформоване. Сила реакції опори, яка зрівноважує силу тяжіння, напрямлена проти сили тяжіння. До того ж, деформація буде неоднакова по вертикалі, бо сила тяжіння діє однаково на всі частини тіла, а сила реакції опори – лише на основу тіла. Найбільше будуть деформовані нижні шари тіла під дією сили ваги верхніх шарів. Живі істоти відчують вагу тому, що верхні шари тіла тиснуть на нижні, одні органи – на інші. Якщо тілу дати змогу вільно падати, забравши підставку, то деформація зникне, а тіло рухатиметься лише під дією сили тяжіння, тобто перебуватиме у стані невагомості. Отже, **невагомість тіла настає тоді, коли тіло рухається лише під дією сили тяжіння з прискоренням g , тобто вільно падає, а також тоді, коли на нього не діють ніякі зовнішні сили.**

Невагомість у космічному кораблі настає тоді, коли не працюють його двигуни, на нього не діють ніякі інші сили, крім сили тяжіння, у тіл, які містяться всередині корабля, зникає внутрішня деформація, живі істоти втрачають відчуття “верху”, вільна рідина набуває форми кулі.

2.8. Інертна і гравітаційна маси

Гравітаційне поле Землі діє на будь-яке тіло, що перебуває на її поверхні. Гравітаційна сила притягання тіла Землею

$$F = G \frac{M_z \cdot m_z}{R^2}, \quad (2.7)$$

де M_z і m_z – **гравітаційні маси** Землі і тіла, які характеризують силу, з якою тіло притягається до Землі, тобто інтенсивність притягання тіл за законом всесвітнього тяжіння. Проте звідси не випливає, що маса цих тіл має ще й інертні властивості. Закон, який пов'язує силу з масою, як мірою інертності тіла, – це другий закон Ньютона, за яким ця ж сила (2.7) тому самому тілу під час падіння надає прискорення a :

$$F = m_i a, \quad (2.8)$$

де m_i – **інертна** маса, яка характеризує інертні властивості тіла, тобто визначає властивість тіла набувати якогось прискорення під дією сили. Прирівнявши значення сил у формулах (2.7) і (2.8), отримуємо рівність

$$G \frac{M_z \cdot m_z}{R^2} = m_i a,$$

звідки

$$\frac{m_z}{m_i} = \frac{a}{C},$$

де C – стала.

Найточніші дослідження засвідчили, що прискорення вільного падіння для заданої точки на поверхні Землі $a=g$ однакове для всіх тіл, незалежно від маси, якщо вони падають у вакуумі. Це означає, що відношення гравітаційної маси тіла до його інертної маси є сталим:

$$\frac{m_z}{m_i} = \text{const.}$$

Якщо коефіцієнт пропорційності вибрати таким, що дорівнює одиниці, то

$$m_i = m_z.$$

Отже, інертна і гравітаційна маси тіла однакові. Це дуже важливо, бо твердження про однаковість інертної і гравітаційної мас в однорідному гравітаційному полі становить принцип еквівалентності, який є в основі загальної теорії відносності Айнштейна.

2.9. Припливи

Припливи і відпливи – це явище періодичного піднімання й опускання рівня води в океанах і морях під дією сил тяжіння Місяця та Сонця на Землю. Хоча для Землі сила тяжіння Сонця більша від сили тяжіння Місяця, проте головну роль у цьому явищі відіграє **неоднорідність** поля сил тяжіння, яка для сили тяжіння Місяця на Землі виявляється більшою.

Розглянемо, як поле тяжіння Місяця діє на Землю. Оскільки поле тяжіння Місяця неоднорідне, то сили тяжіння, які діють на однакові елементи маси земної кулі, неоднакові. На елемент маси, який розташований у точці B ближче до Місяця, діє більша сила тяжіння, ніж на елемент, який міститься у точці A (рис. 2.6). Для наочності це можна зобразити так. Позначимо через F силу тяжіння Місяця, яка діє на елемент маси, розташований у центрі Землі (точка C). Тоді на такий же елемент маси, розташований у точці B , діятиме більша сила, яку можна записати як суму $F+F'$, де F' – додаткова сила, напрямлена в бік Місяця і зумовлена неоднорідністю поля тяжіння Місяця. Відповідно, на елемент маси A діятиме менша сила тяжіння $F-F'$, напрямлена від Місяця.

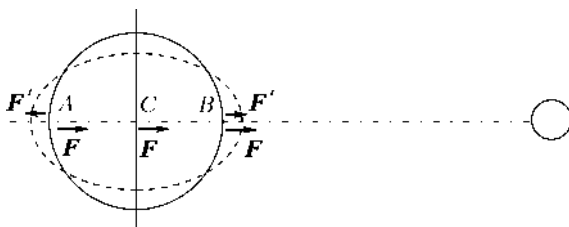


Рис. 2.6. Деформація земної кулі під впливом неоднорідного поля тяжіння Місяця

Отже, можна уявити, що на кожен з елементів A , B , і C маси Землі діють однакові сили F , а на елементи мас у точках A і B – ще додаткові сили F' , напрямлені у протилежні боки, які й де-

формують земну кулю. Можна довести, що $F' \sim Mm/r^3$. Це співвідношення характеризує ступінь неоднорідності поля тяжіння і для Місяця воно більше від аналогічного співвідношення для поля тяжіння Сонця. Отже, ефект деформації земної кулі неоднорідним полем тяжіння Місяця більший, ніж неоднорідним полем Сонця.

Це суттєво не змінює форми твердої оболонки Землі, однак змінює форму поверхні води в океанах. З двох протилежних боків Земної кулі утворюються “горби”, які зберігають своє розташування уздовж лінії, що сполучає центри Землі й Місяця (див. рис. 2.6). Під час добового обертання Землі “горби” рухаються по поверхні океанів, утворюючи припливи і відпливи на їхніх берегах.

Загалом будь-яке тіло, яке рухається в неоднорідному полі тяжіння, деформоване, бо на окремі його ділянки внаслідок неоднорідності гравітаційного поля діють різні сили, які спричинюють видовження тіла у напрямі неоднорідності поля сил. В однорідному полі деформації тіла нема.

Рух великих мас рідини під час припливів призводить до втрат їхньої енергії на тертя. Деформація твердих земних порід під час припливів також супроводжується розсіянням енергії. Отже, припливи супроводжуються розсіянням енергії, що призводить до зменшення швидкості обертання Землі, тобто збільшення тривалості середньої сонячної доби приблизно на 10^{-8} с. Унаслідок цього Місяць віддаляється від Землі зі швидкістю приблизно 125 мм за рік.

Припливи колись були і на Місяці як наслідок дії сил тяжіння Землі, проте після втрати їхньої енергії на тертя швидкість обертання Місяця зменшилась настільки, що він увесь час повернений до Землі одним боком. Тепер припливного ефекту на Місяці немає.

2.10. Космічні швидкості

Запуск космічних апаратів сьогодні набув значного поширення. Для того, щоб тіло покинуло Землю і полетіло в космос, його швидкість має бути більшою від деякого критичного значення.

1. Щоб тіло могло стати супутником Землі, воно повинно мати горизонтальну складову швидкості понад 8 км/с. Доведемо це. На супутник, який обертається навколо Землі, діє доцентрова сила

$$F = \frac{mv^2}{R + h}.$$

Цією силою є сила всесвітнього тяжіння, тому

$$\frac{mv^2}{R + h} = G \frac{Mm}{(R + h)^2},$$

де h – висота супутника над Землею; R – радіус Землі. Якщо висота супутника над Землею невелика, то нехтуючи значенням величини h порівняно з R і зважаючи на те, що

$$G \frac{M}{R^2} = g,$$

отримуємо

$$v = \sqrt{Rg} \approx 8 \text{ км/с.}$$

Це перша космічна швидкість.

2. Тіло стане штучною планетою, коли воно вийде з поля тяжіння Землі. Для цього потрібно виконати роботу на подолання сили притягання тіла Землею. Цю роботу можна виконати завдяки зменшенню кінетичної енергії, яку тіло повинно мати біля поверхні Землі (див.5.9.2), тобто

$$A = \int_R^{\infty} G \frac{Mm}{R^2} dr = \frac{mv^2}{2}.$$

Візьмемо інтеграл й отримаємо рівняння

$$\int_R^{\infty} G \frac{Mm}{R^2} dr = G \frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2},$$

звідки для **другої космічної швидкості**

$$v = \sqrt{2Rg} = 11 \text{ км/с.}$$

В атмосфері повітря завжди є невелика кількість молекул легких газів, які мають швидкості, необхідні для подолання земного тяжіння. Цим пояснюють постійну втрату верхніми шарами атмосфери водню і гелію, молекули яких мають найбільші швидкості.

3. Щоб тіло покинуло сонячну систему, воно повинно мати швидкість $v \approx 16$ км/с, яку називають **третьою космічною швидкістю**.

Дослідження космічного простору має важливе значення для науки і господарства. Значний внесок у науку освоєння космосу зробили наші вітчизняні вчені. Успішний запуск штучного супутника Землі 1957 р. та перший політ людини в космос – Ю. О. Гагаріна – 1961 р. виконаний під керівництвом українського вченого С. П. Корольова. Ще швидше, 1925 р., український учений Ю. В. Кондратюк розробив теорію міжпланетних польотів, яка стала основою програми польоту і висадки на місяць американських астронавтів 1969 р.

Одним з визначних досягнень в освоєнні близького космічного простору є створення системи супутників Землі, за допомогою яких можна досліджувати різні процеси, що відбуваються на нашій планеті. Особливі успіхи є в галузі забезпечення трансляційних багатоканальних міжконтинентальних систем зв'язку. Маємо на увазі систему супутників, які перебувають на фіксованих орбітах на певній висоті над екватором Землі. Період обертання цих супутників точно дорівнює добовому періоду обертання Землі, внаслідок чого Земля і супутники рухаються синхронно, і супутник залишається у фіксованому стаціонарному положенні щодо Землі. Висота такого супутника над поверхнею Землі становить 35 900 км.

2.11. Сили тертя

Якщо на поверхні якогось тіла або в його середовищі рухається інше тіло, то між ними виникають сили, що протидіють рухові. Це сили тертя й опору. **Силами тертя називають сили, які виникають між тертьовими поверхнями різних тіл або в середині одного тіла під час їхнього відносного руху.** Вони напрямлені проти швидкості відносного руху тіл і перешкоджають їхньо-

му рухові. Внаслідок їхньої дії частина механічної енергії перетворюється у теплову.

Тертя поділяють на зовнішнє і внутрішнє. **Зовнішнє (сухе) тертя** залежить від фізичних властивостей стичних поверхонь і сил, які діють на тіла. Воно зумовлене *взаємодією твердих тіл у місцях їхнього дотику* і зводиться до деформації та молекулярних зчеплень у стичних частинах тіл. Досвід засвідчує, що навіть у спробах спричинити переміщення твердого тіла по поверхні іншого твердого тіла, яке перебуває в стані спокою, відчуваємо опір, який пояснюють існуванням тертя спокою. Це тертя завжди дорівнює прикладеній до тіла силі і зі збільшенням сили зростає

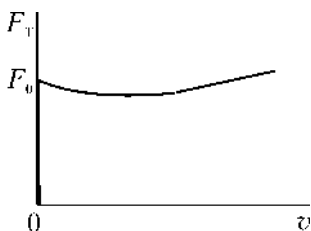


Рис. 2.7. Залежність сили зовнішнього тертя від швидкості тіла

від нуля до максимального значення F_0 (вертикальна ділянка графіка на рис.2.7). *Максимальна сила тертя спокою* F_0 дорівнює тій силі тертя, яка виникає, коли тіло починає рух. Зі збільшенням швидкості сила тертя спочатку дещо зменшується, а потім збільшується, як це зображено на рис. 2.7.

Сухе тертя поділяють на тертя ковзання і тертя кочення. *Тертя кочення* виникає тоді, коли циліндр або куля котяться по поверхні твердого тіла. Виникнення тертя кочення пояснюють непружною деформацією кулі й поверхні тіла у місцях їхнього дотику. Силу тертя кочення визначають за *формулою Кулона*:

$$F_k = k' \frac{P_n}{r},$$

де r – радіус тіла кочення; k' – коефіцієнт тертя кочення; P_n – сила нормального тиску.

Силу тертя ковзання виражають такою формулою:

$$F = k P_n,$$

де k – коефіцієнт тертя ковзання.

Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу тіл і стану їхніх стичних поверхонь, а також, частково, від швидкості руху тіла.

Внутрішнє (в'язке) тертя – це властивість речовини (рідин і газів), яка виявляється в протидії переміщенню частинок *різних шарів того самого тіла*. Воно є наслідком дії сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів речовини і переходу частини молекул з одного шару в інший. Обмежимося лише коротким розглядом сил тертя й опору, які виникають під час руху тіла у в'язкому середовищі, об'єднуючи силу внутрішнього тертя з силою опору. Детальніше це явище розглянуто в розділі механіки рідин.

Загальні особливості сили внутрішнього тертя такі:

- а) сила внутрішнього тертя спокою дорівнює нулю (рис. 2.8);
- б) за малої швидкості тіла сила внутрішнього тертя прямо пропорційна до швидкості відносного руху тіла:

$$F_{\text{вт}} \sim v;$$

- в) за великої швидкості сила внутрішнього тертя прямо пропорційна квадрату швидкості тіла відносно середовища:

$$F_{\text{вт}} \sim v^2.$$

В'язке тертя менше, ніж сухе, тому деталі машин змазують мастилами, замінюючи сухе тертя в'язким.

Тертя відіграє важливу роль у техніці і повсякденному житті. Рух самохідного транспорту відбувається внаслідок існування тертя спокою між колесами і дорогою, яке дещо більше від тертя ковзання, його використовують у пасових передачах зусиль від одних деталей машин до інших. Люди і тварини також можуть

рухатися по землі завдяки існуванню сили тертя спокою. Якщо вона мала, то зчеплення ніг чи коліс самохідного транспорту з землею недосконале і настає ковзання. Тертя також спричинює і негативні процеси, призводячи до перетворення механічної енер-

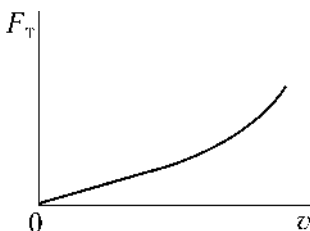


Рис. 2.8. Залежність сили в'язкого тертя від швидкості тіла

гії у внутрішню, теплову, що зменшує коефіцієнт корисної дії механізму.

2.12. Пружні сили. Види деформацій

Поняття абсолютно твердого тіла є зручною моделлю у теоретичних розрахунках. У природі таких тіл немає. Будь-яке тіло під дією зовнішніх сил більше чи менше змінює розміри або форму, тобто деформується. У реальному тілі виникають пружні сили, які протидіють деформувальній силі і намагаються відновити об'єм або форму тіла. Та якщо тверді тіла чинять опір як зміні об'єму, так і зміні форми, то рідини та гази чинять опір лише деформаціям зміни їхнього об'єму. Тому для них маємо відомий закон Паскаля, згідно з яким тиск, якого зазнає рідина, передається в усіх напрямках однаково. Для твердих тіл закон Паскаля не справджується, тиск твердих тіл у різних напрямках передається по-різному.

Пружною називають таку деформацію, коли тіло після припинення дії зовнішніх сил повністю відновлює свої розміри і форму. **Деформація пластична**, якщо після припинення дії зовнішніх сил початкові розміри і форма тіла не повністю відновлюються.

Пружні властивості твердих тіл пояснюють тим, що між атомами і молекулами діють електричні сили, які під час деформації протидіють їхньому переміщенню. Особливістю пружної деформації є те, що вона не руйнує міжатомних зв'язків і не створює нових, усі атоми, зміщуючись, зберігають своїх сусідів, атом не змінює свого оточення. Ця обставина і забезпечує повернення тіла у рівноважний стан після припинення дії зовнішніх сил. Зміна міжатомних відстаней під час пружних деформацій невелика (не більше 0,1%). Це не стосується пружної деформації полімерів (каучук, гума), у яких видовження може сягати 10-15 разів без переходу межі пружності. У процесі розтягу полімерів відбувається розгортання змотаних пачок молекул і їхнє ущільнення.

Пластична деформація тіл зумовлює такі процеси, у яких атоми, подолавши потенціальний бар'єр відштовхування, переходять в інші "потенціальні ями", тобто змінюють своїх сусідів. Головним механізмом пластичної деформації у монокристалах є

ковзання однієї атомної площини по іншій на один період. Ковзання відбувається по найслабкіших місцях (дефекти кристалічної ґратки, тріщини тощо).

Теорія передбачає велику міцність монокристалів, вирощених за ідеальних умов без дефектів. Реальні тверді тіла здебільшого є полікристалами, у них процес деформації складніший.

У теорії пружності доведено, що всі види деформацій (розтяг, стиск, згин, зсув, кручення) можна звести до деформації розтягу і зсуву.

2.13. Деформація розтягу

Закріпимо однорідний стрижень на одному кінці, а до іншого прикладемо розтягувальну силу F_n (рис. 2.9). Позначимо площу поперечного перерізу стрижня літерою S , а його початкову довжину – l . Під дією прикладеної сили стрижень видовжиться на Δl ; у ньому виникне пружна сила F_n' , яка протидіє деформувальній силі F_n . На підставі третього закону Ньютона за модулем вони дорівнюють одна одній, однак напрямлені у протилежні боки:

$$F_n' = -F_n.$$

Експериментально з'ясовано, що сила, яка виникає під час пружної деформації, прямо пропорційна до значення цієї деформації і напрямлена у бік її зменшення (закон Гука):

$$F_n' = -kx,$$

де x – пружна деформація (у нашому випадку $x = \Delta l$); k – коефіцієнт жорсткості тіла (чисельно дорівнює силі, яка зумовлює абсолютну деформацію тіла, що дорівнює одиниці).

Деформацію характеризують не абсолютним видовженням Δl , а відносним

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

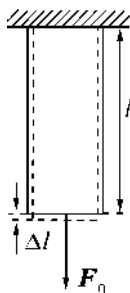


Рис. 2.9. Деформація розтягу

і не силою F_n' , а механічним напруженням

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}, \quad (2.9)$$

тоді **закон Гука** набуває такого вигляду:

$$\sigma_n = E \frac{\Delta l}{l} = E\varepsilon, \quad (2.10)$$

де E – модуль Юнга.

Сформулюємо закон Гука: *під час пружної деформації нормальне механічне напруження прямо пропорційне до відносного видовження тіла.*

З формули (2.10) випливає таке: якщо деформацію тіла описує закон Гука, то відношення механічного напруження σ_n до відносної деформації ε для цього тіла є сталим. Це відношення називають модулем Юнга.

Модуль Юнга чисельно дорівнює механічному напруженню, яке спричинило б відносне видовження тіла, що дорівнює одиниці. Він залежить від матеріалу стрижня.

Щоб знайти зв'язок між коефіцієнтом жорсткості k і модулем Юнга E , запишемо формулу (2.9) так:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} = \frac{kl}{S} \frac{\Delta l}{l}.$$

На підставі (2.10) отримуємо

$$E = \frac{kl}{S} \quad \text{і} \quad k = \frac{ES}{l}. \quad (2.11)$$

Отже, коефіцієнт жорсткості залежить від форми і розмірів матеріалу зразка.

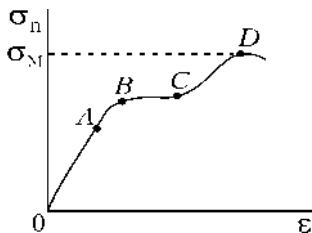


Рис. 2.10. Діаграма розтягу

Очевидно, що розтяг чи стискання стрижня супроводжуються відповідними змінами його поперечних розмірів. На рис. 2.10 зображена діаграма розтягу, де по осі ординат відкладено діюче механічне напруження σ_n , а по осі абсцис – від-

носне видовження ε . З діаграми видно, що закон Гука (лінійна залежність σ_n від ε) виконується у межах від нуля до точки A (ділянка пружної деформації); від A до B деформація пружна, однак нелінійна; ділянка BC є ділянкою плинності; точка D – межа міцності.

Діаграма розтягу залежить від багатьох різних факторів.

2.14. Деформація зсуву

Якщо у прямокутному бруску заввишки d закріпити нижню грань, а до верхньої грані прикласти дотичну силу F_τ , то брусок зазнає деформації зсуву (рис. 2.11). Ця деформація полягає у тому, що всі шари бруска **змістяться** на кут φ , тангенс якого називають *відносним зсувом*. За малого кута φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AA'}{d} \approx \varphi,$$

де AA' – абсолютний зсув. **Закон Гука для пружної деформації зсуву** сформулюємо так: *тангенціальне механічне напруження під час пружної деформації зсуву прямо пропорційне до відносного зсуву*. Запишемо це у вигляді формули

$$\sigma_\tau = G\varphi.$$

Тут

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{S},$$

де σ_τ – тангенціальне напруження; S – площа поверхні, до якої прикладена дотична сила F_τ ; G – модуль зсуву. **Модуль зсуву** – це величина, значення якої дорівнює тангенціальному напруженню, яке спричинило б відносний зсув, що дорівнює одиниці.

Існує зв'язок між модулем Юнга і модулем зсуву. Для більшості однорідних та ізотропних тіл цей зв'язок такий:

$$G \approx 0,4E.$$

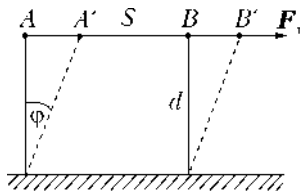


Рис. 2.11. Деформація зсуву

Контрольні запитання

1. Чому перший закон Ньютона називають законом інерції?
2. Що таке принцип незалежності дії сил?
3. Як формують другий закон Ньютона для загального випадку?
4. Що твердить принцип Галілея?
5. Яке формулювання теореми про рух центра мас системи тіл?
6. Які фундаментальні сили природи?
7. Що таке вага тіла?
8. Чим відрізняється сухе тертя від в'язкого?
9. Нарисуйте діаграму розтягу зразка. Що означає прямолінійна ділянка діаграми?
10. Як формують закон Гука для пружної деформації зсуву?

Приклади розв'язування задач

2.1. До тіла масою $m=800$ г, яке лежить на столі, прив'язана нерозтяжна нитка, перекинута через невагомий блок, закріплений до краю стола (рис. 2.12). На кінці нитки прив'язано вантаж масою $m=600$ г. Визначте прискорення тіл a і натяг нитки T , якщо коефіцієнт тертя тіла до поверхні стола дорівнює 0,25.

Розв'язування. Запишемо другий закон Ньютона для тіл у проєкціях на напрям прискорення:

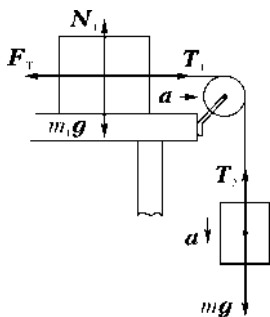


Рис. 2.12.

$$m_1 a = T_1 - k m_1 g ;$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2 .$$

Додамо ці рівняння.

$$(m_1 + m_2) a = T_1 - T_2 + (m_2 - k m_1) g .$$

Однак $T_1 = T_2 = T$, бо нитка нерозтяжна, отже,

$$(m_1 + m_2) a = (m_2 - k m_1) g .$$

Для прискорення отримуємо формулу

$$a = \frac{m_2 - k m_1}{m_1 + m_2} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{0,6 - 0,25 \cdot 0,80}{1,4} 9,81 = 2,80 \text{ м/с}^2 .$$

Шукаємо натяг нитки. Підставимо значення прискорення в друге рівняння:

$$m_2 \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2} g = m_2 g - T.$$

Для натягу нитки отримуємо

$$T = m_2 g \left(1 - \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2 (1 + k)}{m_1 + m_2} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{0,80 \cdot 0,60 \cdot (1 + 0,25)}{1,4} 9,81 = 8,24 \text{ Н.}$$

2.2. Яку силу тяги розвиває автомобіль масою 1 т, що рухається під гору з нахилом 1 м на 25 м шляху, якщо рух рівномірний, а сила тертя дорівнює 0,1 від його сили нормального тиску на дорогу?

Розв'язування. Щоб рух автомобіля під гору був рівномірний, сила, яку розвиває автомобіль, повинна витратитися на подолання сили тертя і тої складової сили тяжіння F_1 , яка паралельна до шляху (рис.2.13):

$$F = F_{\text{до}} + F_1.$$

Сила тертя

$$F_{\text{нд}} = kF_2 = kmg \cos \alpha; \quad F_1 = mg \sin \alpha.$$

Тому

$$F = kmg \cos \alpha + mg \sin \alpha = mg(k \cos \alpha + \sin \alpha).$$

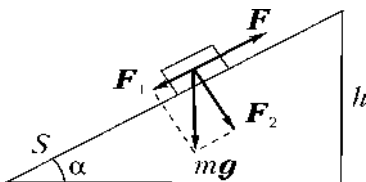


Рис. 2.13.

Далі,

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} = \frac{1}{25} = 0,04, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,9992 \approx 1.$$

Отже,

$$F = 1000 \cdot 9,81(0,1 \cdot 1 + 0,04) = 1373,4 \text{ Н} \approx 1,37 \text{ кН.}$$

Задачі

2.1. На шнурку висить тіло масою 1 кг. Чому дорівнює натяг шнурка, якщо його разом з тілом: 1) піднімати з прискоренням 4 м/с^2 ; 2) опускати з таким же прискоренням?

Відповідь: 13,8 Н; 5,8 Н.

2.2. Потяг масою 500 т після зупинення тяги паровоза під дією сили тертя $9,8 \cdot 10^4 \text{ Н}$ зупиняється через 1 хв. З якою швидкістю їхав потяг?

Відповідь: 11,75 м/с.

2.3. Тіло рухається під дією сталої сили $F=10 \text{ Н}$ так, що залежність пройденого тілом шляху s від часу t можна описати таким рівнянням: $s = A - Bt + Ct^2$, де стала $C=1 \text{ м/с}^2$. Знайдіть масу тіла.

Відповідь: 5 кг.

2.4. Повітряна куля масою M опускається зі сталою швидкістю. Яку кількість баласту треба викинути, щоб куля почала підніматися з тією ж швидкістю? Піднімальну силу кулі F вважати сталою.

Відповідь: $\Delta M = 2(M-F/g)$.

2.5. На двох паралельних пружинах однакової довжини висить стрижень, вагою якого можна знехтувати. Коефіцієнти жорсткості пружин, відповідно: $k_1=19,62 \text{ Н/см}$, $k_2=29,43 \text{ Н/см}$. Довжина стрижня дорівнює відстані між пружинами $l=10 \text{ см}$. У якому місці стрижня треба підвісити вантаж, щоб стрижень був горизонтальним?

Відповідь: 6 см від другої пружини.

Розділ 2 ЗАКОНИ ДИНАМІКИ	37
2.1. Закони Ньютона	37
2.2. Принцип відносності Галілея	41
2.3. Система матеріальних точок. Рух центра мас системи.....	43
2.4. Швидкість центра мас системи	45
2.5. Рух тіл змінної маси.....	47
2.6. Види сил. Фундаментальні сили	48
2.7. Сили в механіці. Гравітаційні сили	49
2.8. Інертна і гравітаційна маси.....	53
2.9. Припливи	54
2.10. Космічні швидкості.....	55
2.11. Сили тертя.....	57
2.12. Пружні сили. Види деформацій.....	60
2.13. Деформація розтягу	61
2.14. Деформація зсуву	63
Контрольні запитання	64
Приклади розв'язування задач	64
Задачі.....	37

Розділ 3 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Є безліч різних систем відліку, однак закони Ньютона виконуються лише в інерціальних системах. Проте на практиці часто маємо справу з системами відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальної. У таких випадках другий закон Ньютона в звичайній формі застосовувати не можна. Спробуємо знайти рівняння руху тіла в системі відліку, яка рухається з прискоренням. Такі системи відліку називають неінерціальними. Це питання дуже важливе, бо багато подій відбуваються саме в таких неінерціальних системах відліку.

3.1. Сили інерції

Припустимо, що система K' рухається з прискоренням $\mathbf{a}_0$ відносно інерціальної системи K (рис. 3.1). Положення точки A у просторі будемо описувати за допомогою радіусів-векторів $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$, відповідно, в системі K і K' .

Згідно з рис. 3.1 можемо записати

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0.$$

Припустимо далі, що на точку A у системі K діє сила $\mathbf{F}$. Прискорення, яких набуває точка A в системах K і K' , будуть пов'язані між собою таким рівнянням:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2},$$

або

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0. \quad (3.1)$$

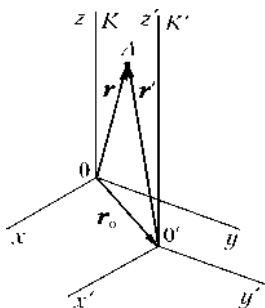


Рис. 3.1. Рух точки в системах K і K'

Помножимо рівність (3.1) на масу m точки A :

$$ma = ma' + ma_0,$$

або

$$ma' = ma - ma_0,$$

тобто

$$ma' = F - ma_0, \quad (3.2)$$

де F – сила, яка діє на масу m з погляду спостерігача у системі K ; a' – прискорення, яке має точка A в системі K' . Як бачимо, у рівнянні (3.2) з'явився додатковий член ma_0 так, ніби на точку A діє ще додаткова сила. Цю додаткову силу $F_{in} = -ma_0$ називають силою інерції. Її визначають як добуток маси тіла на прискорення неінерціальної системи відліку, взяте зі знаком мінус. Специфікою сил інерції є те, що вони спричинені не дією іншого тіла, а властивістю системи відліку, для них не існує протидійної сили. Сили інерції зумовлені властивістю тіл зберігати свій стан спокою чи рівномірного і прямолінійного руху відносно інерціальної системи відліку.

З рівняння (3.2) випливає таке: навіть якщо точка A перебуває у стані спокою у системі K' ($a' = 0$), то на неї діє сила. За законом Ньютона це неможливо, отже, закони Ньютона у звичайній формі не застосовні до тіл, які перебувають у неінерціальній системі відліку.

Щоб другий закон Ньютона можна було застосовувати в неінерціальних системах, зберігаючи і форму його запису, вводять поняття сил інерції. З силами інерції другий закон Ньютона записують так:

$$ma' = F + F_{in}.$$

Таке рівняння виконується в неінерціальній системі відліку.

Третім законом Ньютона в неінерціальній системі відліку користуватись не можна.

У неінерціальній системі відліку сили інерції виявляються по-різному залежно від форми прискореного руху системи і тіла.

3.2. Сили інерції у поступальному русі системи відліку

Нехай неінерціальна система відліку рухається поступально з прискоренням a_0 відносно інерціальної. Тіло A , яке перебуває в цій неінерціальній системі (наприклад, куля (рис. 3.2)), буде рухатися з прискоренням $-a_0$.

З огляду на це спостерігач, який також перебуває у цій неінерціальній системі, зазначить, що на тіло A подіяла сила. Цією силою і є сила інерції

$$F_{\text{ін}} = -ma_0. \quad (3.3)$$

Дію таких сил інерції у поступальному русі часто можна спостерігати у нашому повсякденному житті, наприклад, у засобах пересування.

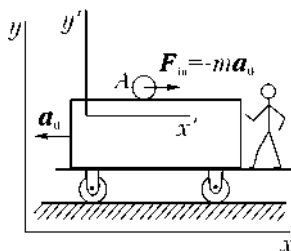


Рис. 3.2. На кулю A діє сила інерції $F_{\text{ін}}$

3.3. Відцентрова сила інерції

Припустимо, що система відліку K' обертається відносно інерціальної. Кожна точка такої системи рухається з прискоренням (доцентровим), тому система неінерціальна. Нехай, наприклад, на диску, що обертається з кутовою швидкістю ω , зроблено радіально спрямовувальний жолобок, у якому може рухатися прикріплена пружиною до осі диска кулька (рис. 3.3). Під час обертання диска кулька буде рухатися у жолобку з прискоренням, розтягуючи пружину доти, доки пружна сила $F_{\text{пр}}$ не дорівнюватиме добуткові маси кульки на її доцентрове прискорення:

$$F_{\text{дд}} = ma = m\omega^2 R.$$

У системі K' кулька перебуває у стані спокою, бо на неї, крім сили $F_{\text{пр}}$, діє ще сила інерції $F_{\text{вц}}$:

$$F_{\text{вц}} = m\omega^2 R.$$

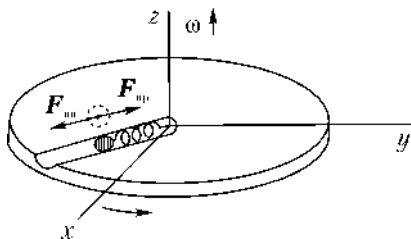


Рис. 3.3. Під час обертання диска на кульку діють дві сили: пружна і відцентрова сила інерції

Силу $F_{\text{вц}}$ називають відцентровою силою інерції, вона завжди діє на тіло в неінерціальній системі відліку, яка обертається, незалежно від того, перебуває тіло у стані спокою чи у стані відносного руху.

Земля також обертається, тому система координат, пов'язана з Землею, – неінерціальна.

На будь-яке тіло, що є на поверхні Землі, діє відцентрова сила інерції, спрямована від Землі, яка тим більша, чим далі від осі обертання перебуває тіло. Дією відцентрової сили інерції пояснюють залежність прискорення вільного падіння g від географічної широти. На екваторі ця сила найбільша, тому там g найменше.

Дію відцентрової сили інерції широко використовують у різних механізмах, таких як сушильна машина, молочний сепаратор, центрифуга тощо. Дію цих механізмів пояснюють так: на частинки з різними масами діють різні сили, що дає змогу їх сепарувати.

3.4. Сила Коріоліса

Якщо в неінерціальній системі відліку, яка обертається відносно інерціальної, тіло рухається поступально, то в такому разі, крім відцентрової сили інерції, на це тіло діє ще інша сила інерції – сила Коріоліса. Нехай, наприклад, платформа обертається навколо центральної осі з кутовою швидкістю ω , а тіло масою m рухається по цій платформі з початковою швидкістю v від центра до краю платформи вздовж її радіуса (рис. 3.4). Якби платформа не оберталась, то тіло, рухаючись уздовж радіуса, потрапило б у точку P . Унаслідок обертання платформи та інерції це тіло відхиляється від прямолінійного руху і переміщується так, ніби на нього перпендикулярно до швидкості діє ще сила F_K (сила Коріоліса), і тому воно потрапляє у точку P' .

Вектор сили Коріоліса F_K напрямлений перпендикулярно до векторів лінійної швидкості $\mathbf{v}$ і кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$, його визначають за такою формулою:

$$F_K = 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}].$$

Абсолютна сила Коріоліса

$$F_K = 2mv\omega \sin(\omega v).$$

Дією сил Коріоліса пояснюють низку явищ, що простежуються на Землі. Якщо, наприклад, тіло рухається у північній півкулі вздовж меридіана, то сила Коріоліса, яка діє на нього внаслідок добового обертання Землі, буде напрямлена на захід. Цим пояснюють сильніше підмивання правих берегів

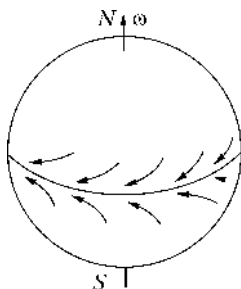


Рис. 3.5. Напрямок пасатів пояснюють дією сили Коріоліса

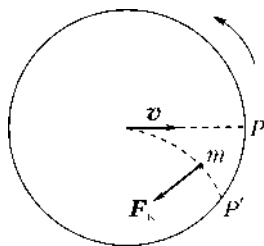


Рис. 3.4. Дія сили інерції Коріоліса на рухому точку

річок у північній півкулі, які течуть уздовж меридіана, більше зношення правої рейки по ходу потягів, а також напрям пасатів – вітрів, які дмуть у тропічному поясі Землі – північно-східні в нашій півкулі і південно-східні в південній (рис. 3.5), напрям морських течій тощо. Сила Коріоліса, діючи на тіла, що падають з висоти на землю, спричинює відхилення їхнього руху від вертикалі на схід.

3.5. Штучна гравітація

Як видно з формули (3.3), силу інерції можна знайти, помноживши масу тіла на прискорення системи відліку, а це означає, що прискорення тіл різних мас у заданій неінерціальній системі відліку однакове, так само, як в гравітаційному полі. Отже, можна стверджувати, що існує еквівалентність сил інерції і гравіта-

ційних. Цю властивість застосовують для створення штучної гравітації.

Штучну гравітацію можна створити різними способами. Наприклад, якщо пристрій у формі пустотілого тороїда обертати з кутовою швидкістю ω навколо центральної осі, то на предмети, що містяться всередині тороїда, діятиме відцентрова сила інерції $F_{in} = m\omega^2 r$, де m – маса предмета; r – його відстань від осі обертання. У таких пристроях можна створити штучне гравітаційне поле і досліджувати перевантаження космонавтів у їхніх тренуваннях під час готування до космічних польотів.

Штучне перевантаження можна створити і в системах, які рухаються поступально з великим прискоренням, наприклад, у ракетах, штучних супутниках, літаках, а також у ковзких сидіннях (катапультах), яким надають руху реактивні двигуни. Великого перевантаження зазнає космонавт під час запуску та приземлення космічного апарата.

Перевантаження небезпечне для людини і тварин. У стані перевантаження внутрішні органи космонавта чинять великий тиск на інші органи, а все тіло – на кістки, що може призвести до їхнього ушкодження. Дослідження засвідчили, що максимальне перевантаження, яке може витримати організм людини, залежить від напрямку прискорення і тривалості його дії. Людина може витримати перевантаження приблизно у $10 g$ за його тривалості близько 1 с. Біологи за допомогою пристроїв штучної гравітації досліджують вплив перевантажень на біологічні об'єкти. Виявилось, що рослини, як і космонавти, відчувають вагу, спричинену прискоренням, і ростуть у протилежний до дії відцентрової сили бік, тобто відчувають напрям “верху”.

Контрольні запитання

1. Яку систему відліку називають неінерціальною?
2. Чому система відліку, яка обертається відносно інерціальної системи, є неінерціальна?
3. Як треба записати рівняння руху в неінерціальній системі відліку?
4. У чому полягає еквівалентність сил інерції і гравітаційних сил?
5. Які є приклади дії сил Коріоліса на Землі?

Приклади розв'язування задач

3.1. Тіло, кинуте з висоти Ейфелевої башти ($h=300$ м, географічна широта $\varphi=45^\circ$), вільно падає на землю. Визначте, у який бік і на яку відстань від вертикалі буде відхилене місце падіння тіла.

Розв'язування. Земна система відліку неінерціальна внаслідок добового обертання Землі. Тому на тіло, яке вільно падає, крім сили тяжіння, діє ще сила інерції Коріоліса:

$$F_K = 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}],$$

де v – швидкість руху тіла; ω – кутова швидкість добового обертання Землі ($\omega=2\pi/24\cdot 60\cdot 60 = 7,27\cdot 10^{-5}$ рад/с). Сила інерції Коріоліса набагато менша від сили тяжіння, тому можна вважати, що швидкість тіла напрямлена вздовж радіуса Землі. Напрямок сили Коріоліса F_K визначимо за правилом свердлика. Як видно з рис. 3.6, вона напрямлена з заходу на схід. Її значення таке:

$$F_K = 2mv\omega \sin(90^\circ + \varphi) = 2mv\omega \cos \varphi.$$

Ця сила спричинятиме бокове прискорення тіла, дотичне до поверхні Землі

$$a_K = \frac{F_K}{m} = 2v\omega \cos \varphi.$$

Швидкість падіння тіла

$$v = gt,$$

тому прискорення, зумовлене силою інерції Коріоліса,

$$a_K = 2\omega gt \cos \varphi.$$

Як бачимо, воно також залежить від t . Щоб знайти складову швидкості v_K , дотичну до поверхні Землі, вираз для a_K треба інтегрувати:

$$v_K = \int 2\omega gt \cos \varphi dt = \omega g t^2 \cos \varphi + C_1.$$

Зміщення тіла

$$s = \int (\omega g t^2 \cos \varphi + C_1) dt = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi + C_1 t + C_2.$$

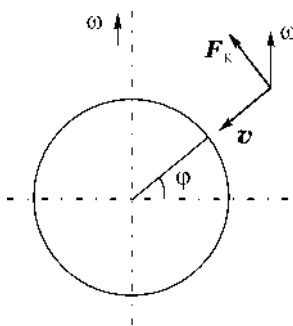


Рис. 3.6.

Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов. Якщо $t = 0$, то $v_K = 0$ і $s = 0$, тому $C_1 = 0$ і $C = 0$. Час t є часом вільного падіння тіла з висоти h :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Отже, шукане відхилення тіла на схід

$$s = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}} \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{2}{3} \cdot 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \sqrt{\frac{2 \cdot 300}{9,81}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 8,11 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Задачі

3.1. На яку частину зменшується вага тіла на екваторі внаслідок добового обертання Землі?

Відповідь: 0,34%.

3.2. До стелі автомобіля, що їде зі швидкістю 72 км/год, підвішена на нитці кулька. На який кут відхилиться нитка, якщо автомобіль, гальмуючи, зупиниться через 5 с?

Відповідь: $\alpha = 22^\circ$.

Розділ 3 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ	67
3.1. Сили інерції	67
3.2. Сили інерції у поступальному русі системи відліку...	69
3.3. Відцентрова сила інерції	69
3.4. Сила Коріоліса.....	70
3.5. Штучна гравітація	71
Контрольні запитання.....	72
Приклади розв'язування задач.....	73
Задачі	74

Розділ 4

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Динаміка твердого тіла має свою специфіку, яка виявляється в тому, що можливий обертальний рух тіла навколо деякої точки або осі. Значна більшість застосовуваних у техніці машин мають обертові частини, тому теорія оберткових рухів має важливе значення для таких прикладних наук, як деталі машин, небесна механіка, балістика тощо.

Обертальний рух твердого тіла описують рівнянням, аналогічним до рівняння другого закону Ньютона для поступального руху. Його називають основним рівнянням динаміки обертального руху, у ньому є нові величини, такі як момент сили, момент інерції, момент імпульсу. Необхідність введення цих величин зумовлена тим, що обертальний рух твердого тіла визначений не лише силою і масою тіла, а й просторовим розподілом мас тіл і розташуванням прямих, уздовж яких діють сили. Якщо ввести поняття про момент сили, момент інерції і момент імпульсу, то форма законів обертальних рухів зберігається такою ж, як і у випадку поступальних рухів, однак замість сили фігурує момент сили, замість маси – момент інерції, замість імпульсу – момент імпульсу, а замість прискорення – кутове прискорення.

4.1. Момент сили

Момент сили відносно точки (полюса). Розглянемо тверде тіло, закріплене в точці O (рис. 4.1). Якщо на нього діє сила F , прикладена до точки A , то тіло починає обертатися навколо осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать вектори сили F і радіус-вектор r точки прикладання сили. Дію сили на таке тіло характеризують моментом сили відносно точки. **Моментом сили відносно точки O (наприклад, початку координат) називають**

вектор $\mathbf{M}$, який дорівнює векторному добуткові радіуса-вектора $\mathbf{r}$ точки прикладання сили на вектор сили $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}].$$

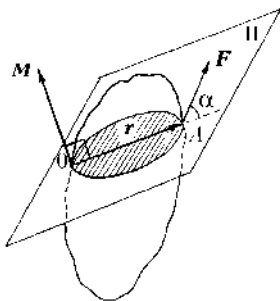


Рис. 4.1. Вектор $\mathbf{M}$ є моментом сили $\mathbf{F}$ відносно точки O . Він напрямлений перпендикулярно до площини Π , у якій лежать вектори $\mathbf{r}$ і $\mathbf{F}$

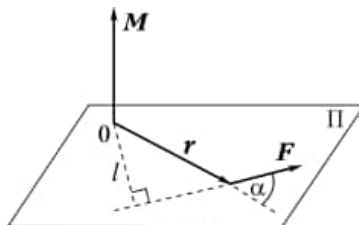


Рис. 4.2. Довжина перпендикуляра l є плечем сили $\mathbf{F}$ відносно точки O

На рис. 4.2 зображено взаємне розташування векторів $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$ і $\mathbf{M}$. Модуль вектора $\mathbf{M}$ дорівнює добуткові модуля сили на плече:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\mathbf{F}$; α – кут між векторами $\mathbf{r}$ і $\mathbf{F}$; l – плече сили (див. рис. 4.2).

Плечем сили називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки O на пряму, уздовж якої діє сила $\mathbf{F}$. Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\mathbf{r}$ і $\mathbf{F}$, його напрям визначають за правилом свердлика. Якщо вісь свердлика поставити перпендикулярно до площини Π , у якій лежать вектори $\mathbf{r}$ і $\mathbf{F}$, та обертати його у напрямі від $\mathbf{r}$ до $\mathbf{F}$, то поступальний рух свердлика відбуватиметься у напрямі вектора $\mathbf{M}$.

В абсолютно твердого тіла точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії дії цієї сили, тобто розташування точок прикладання сил на цих прямих може бути довільне. У таких випадках силу можна трактувати як ковзний, а не закріплений вектор.

Припустимо, що тіло, на яке діє сила F_0 , може вільно обертатися навколо закріпленої осі. Обертальний рух тіла у такому разі спричинює момент сили відносно осі M_z . За означенням

$$M_z = [RF],$$

де R – радіус-вектор сили відносно осі z ; F – складова сили F_0 , що лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання. **Момент сили відносно осі дорівнює векторному добуткові радіуса-вектора сили відносно осі й складової сили, розташованої у площині, перпендикулярній до осі.** Він чисельно дорівнює проекції вектора M відносно точки O на вісь, що проходить через точку O . Саме він спричинює обертальний рух тіла навколо цієї осі. Тому далі будемо мати на увазі тільки сили або їхні складові, що лежать у площині, перпендикулярній до осі обертання.

Дуже часто на тіло, що має вісь обертання, водночас діють дві протилежно напрямлені сили, перпендикулярні до осі. *Дві однакові за модулем, паралельні й напрямлені в протилежні боки сили, що не діють уздовж одної прямої, називають парю сил.* Найкоротшу відстань між прямими, уздовж яких діють сили, називають **плечем пари сил**. Векторна сума моментів цих сил є моментом пари сил. **Момент пари сил** – це вектор, він чисельно дорівнює добутку одної з сил на плече пари сил і напрямлений за правилом свердлика перпендикулярно до площини, в якій лежать сили.

4.2. Момент інерції

Інертність тіла в його обертальному русі характеризують моментом інерції. Якщо матеріальна точка обертається навколо осі (рис. 4.3), то **моментом інерції точки відносно осі називають скаляр I , який вводять так:**

$$I = mr^2,$$

де m – маса точки; r – відстань від осі обертання до точки.

Тверде тіло можна розглядати як систему матеріальних точок, тоді момент інерції твердого тіла відносно осі обертання

$$I = \sum m_i r_i^2.$$

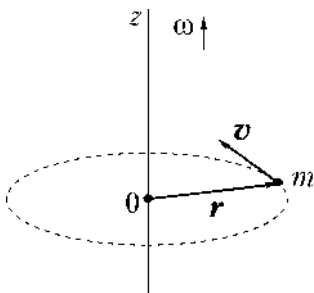


Рис. 4.3. Момент інерції точки відносно осі характеризує інертність точки в обертальному русі

У випадку, коли тіло потрібно розглядати як суцільне середовище з неперервним розподілом маси, його розбивають на елементарні об'єми масою dm , для яких елемент моменту інерції

$$dI = r^2 dm,$$

і момент інерції тіла шукають шляхом інтегрування по всьому об'єму тіла

$$I = \int_V r^2 dm.$$

4.3. Момент імпульсу

4.3.1. Момент імпульсу матеріальної точки

Нехай матеріальна точка масою m рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно деякої точки O (полюса) і в момент часу t є на відстані $\mathbf{r}$ від точки O (рис. 4.4).

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно точки (полюса) O називають вектор $\mathbf{L}$, який дорівнює векторному добуткові радіуса-вектора $\mathbf{r}$ на вектор імпульсу $\mathbf{p}$ матеріальної точки:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}].$$

Запишемо модуль вектора моменту імпульсу:

$$L = rps \sin \alpha = rmv \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами $\mathbf{r}$ і $\mathbf{p}$.

Припустимо, що матеріальна точка рухається по колу навколо осі z у площині, перпендикулярній до цієї осі (рис. 4.5). Легко бачити, що у такому разі напрям кутової швидкості ω і моменту

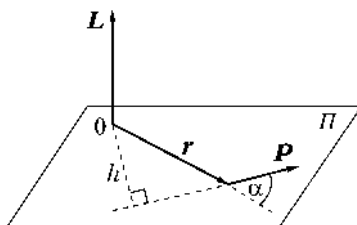


Рис. 4.4. Момент імпульсу $\mathbf{L}$ точки відносно точки (полюса) O – це вектор, напрямлений перпендикулярно до площини Π , у якій лежать вектори $\mathbf{p}$ і $\mathbf{r}$

імпульсу L точки відносно точки O , що лежить на цій осі, не збігаються. Момент імпульсу матеріальної точки відносно точки O напрямлений під деяким кутом до осі обертання, його можна розкласти на дві складові: L_n , перпендикулярну до осі, і L_z , напрямлену вздовж осі обертання. Вираз

$$L_z = [Rp]$$

називають моментом імпульсу точки відносно осі. У нашому випадку **момент імпульсу матеріальної точки відносно осі дорівнює векторному добуткові радіуса-вектора точки відносно осі на вектор імпульсу точки**. Для модуля вектора моменту імпульсу точки відносно осі для цього випадку, аналогічно до виразу для моменту сили, маємо

$$L_z = Rp. \quad (4.1)$$

Ця величина чисельно дорівнює проекції вектора моменту імпульсу L матеріальної точки відносно точки O на вісь z , що проходить через точку O .

Поняття моменту імпульсу широко застосовують під час вивчення руху тіл по колу, наприклад, руху планет, орбітального руху електронів тощо.

Оскільки $v = R\omega$, то вираз (4.1) перепишемо так:

$$L_z = RmR\omega = mR^2\omega = I\omega,$$

де I – момент інерції точки відносно осі обертання. Отже, момент імпульсу точки відносно осі обертання

$$L_z = I\omega.$$

Момент імпульсу має сенс також і тоді, коли точка рухається по довільній кривій, зокрема по прямій, як це зображено на

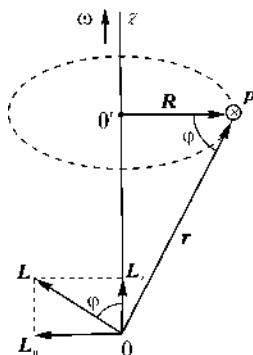


Рис. 4.5. Момент імпульсу L точки відносно точки (полюса) O напрямлений під деяким кутом φ до осі обертання z

рис. 4.4, коли перпендикулярна до лінії руху відстань до точки-полюса O завжди дорівнює h , а момент імпульсу відносно цієї точки сталий і дорівнює добуткові ph .

4.3.2. Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі

Припустимо, що тверде тіло обертається навколо нерухомої, закріпленої у підшипниках осі з кутовою швидкістю ω . Довільний елемент маси тіла Δm_i будемо вважати матеріальною точкою, що обертається навколо осі z по колу радіусом R_i . Відповідно до формули (4.1) можемо записати для проекції моменту імпульсу L_{iz} елемента маси відносно осі обертання:

$$L_{iz} = R_i \Delta m_i v_i = R_i^2 \Delta m_i \omega,$$

де v_i – лінійна швидкість елемента маси Δm_i .

Момент імпульсу всього тіла відносно осі обертання L_z є сумою моментів імпульсів усіх елементів мас тіла відносно осі z :

$$L_z = \sum L_{iz} = \omega \sum R_i^2 \Delta m_i = I_z \omega,$$

де $I_z = \sum R_i^2 \Delta m_i$ – момент інерції тіла відносно осі z . Отже,

$$L_z = I_z \omega. \quad (4.2)$$

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі напрямлений уздовж осі обертання, тому вираз (4.2) можна записати у векторній формі:

$$\mathbf{L}_z = I_z \boldsymbol{\omega}.$$

Вектор моменту імпульсу $\mathbf{L}$ усього тіла відносно точки O , що лежить на цій осі, напрямлений під деяким кутом до вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ (осі обертання (рис. 4.6)). Під час обертання тіла він описує конус навколо осі

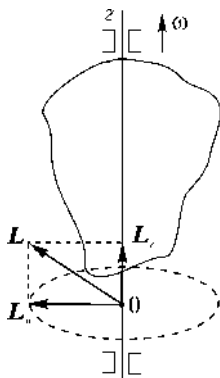


Рис. 4.6. Під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі момент імпульсу $\mathbf{L}$ тіла відносно точки описує конус

обертання. Якщо його розкласти на складові вздовж осі обертання L_z і перпендикулярну до осі L_n , то під час рівномірного обертання тіла складова L_z буде сталою, а зміну напрямку складової L_n спричинюють додаткові моменти сил реакції у підшипниках, у яких закріплена вісь. Таке тіло, обертаючись навколо осі, періодично діє на підшипники, що призводить до вібрації всього механічного пристрою.

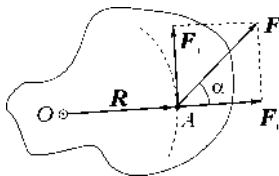
4.4. Основний закон динаміки обертального руху

Загальним обертальним рухом твердого тіла можна вважати його рух навколо закріпленої точки, через яку проходить миттєва вісь, навколо якої тіло обертається в заданий момент часу. У загальному випадку миттєва вісь змінює орієнтацію в просторі, її розташування в довільний момент часу визначене двома кутами, які є функціями часу. Це складний вид руху, і ми обмежимося частковим випадком, коли тверде тіло закріплене у двох нерухомих точках і може обертатися навколо осі OO' , яка проходить через ці точки.

4.4.1. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Знайдемо рівняння руху твердого тіла, яке може обертатися навколо закріпленої у підшипниках осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка 4.7. Нехай до цього тіла у точці A прикладена якась зовнішня сила (не показана на рис. 4.7).

Рис. 4.7. Обертальний момент сили відносно осі O , що перпендикулярна до площини рисунка, дає лише тангенціальна складова сили F_τ



Розкладемо цю силу на дві складові: паралельну до осі обертання і складову F , що лежить у площині, перпендикулярній до осі. Обертальний момент сили відносно осі обертання дає лише тангенціальна складова зовнішньої сили $F_\tau = F \sin \alpha$, де α – кут між радіусом-вектором точки прикладання сили R і вектором сили

$\mathbf{F}$. Припустимо, що сил тертя нема. Розіб'ємо тіло на елементарні маси Δm_i і запишемо рівняння руху елемента маси

$$\Delta m_i a_i = F_{\tau i}, \quad (4.3)$$

де a_i – тангенціальне прискорення; $F_{\tau i}$ – тангенціальна дотична до кола складова сили, яка діє на елемент Δm_i . Позначимо через R_i відстань елемента Δm_i від осі обертання і замість тангенціального прискорення a_i введемо кутове прискорення β (1.3), воно однако-
ве для усіх елементів тіла. Тоді рівняння (4.3) набуде вигляду

$$\Delta m_i R_i \beta = F_{\tau i}.$$

Помножимо це рівняння на R_i :

$$\Delta m_i R_i^2 \beta = F_{\tau i} R_i = M_{iz}.$$

Тут M_{iz} є моментом сили $F_{\tau i}$ відносно осі обертання OO' . Такі ж рівняння можна записати для всіх N елементів тіла. Додавши їх, отримаємо вираз

$$\sum (\Delta m_i R_i^2) \beta = \sum M_{iz} = M_z.$$

Величина $\sum \Delta m_i R_i^2 = I_z$ є моментом інерції тіла відносно осі

обертання, $\sum M_{zi} = M_z$ – це сумарний момент обертальних сил

відносно осі обертання OO' . Оскільки вектор сумарного моменту цих сил розташований уздовж осі OO' , то останнє рівняння можна записати у векторному вигляді:

$$I_z \beta = M_z. \quad (4.4)$$

Цей вираз називають **основним рівнянням динаміки обертального руху** для випадку обертання тіла навколо нерухомої осі. З нього випливає таке: *якщо на тіло, закріплене на нерухомій осі, діють моменти сил, то тіло обертається навколо цієї осі з кутовим прискоренням, яке прямо пропорційне сумі моментів сил, що діють.*

Як бачимо, рівняння (4.4) подібне до рівняння другого закону Ньютона:

$$ma = F.$$

В обертальному русі роль маси, тобто міри інертності, відіграє момент інерції, а роль сили – момент сили. Якщо сила спричинює прискорення тіла у поступальному русі, то момент сили – кутове прискорення в обертальному русі. Тіло має момент інерції відносно будь-якої осі завжди, незалежно від характеру руху, так само, як має масу.

Запишемо умову рівноваги тіла, яке може обертатися навколо закріпленої осі. **Умовою рівноваги** такого тіла буде, очевидно, те, що *сума моментів усіх сил, які діють на тіло, дорівнює нулю*. Це так званий **закон моментів**. Його окремим випадком є відоме правило важеля, яке визначає умову рівноваги стрижня, що може обертатися навколо одної з точок опори. У загальному випадку умову рівноваги твердого тіла формулюють так: **абсолютно тверде тіло перебуває в стані рівноваги, якщо рівнодійна всіх сил, що діють на тіло, а також підсумковий момент сил дорівнюють нулю** (вважаємо, що тіло не бере участі в рівномірному поступальному й обертальному рухах). Якщо повна енергія тіла дорівнює його потенціальній енергії, яка, до того ж, має мінімум, то рівновага буде стійкою.

4.4.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки

Виведемо основний закон динаміки обертального руху для загальнішого випадку, коли тіло обертається навколо нерухомої точки. Можна сподіватися, що подібно до зв'язку між векторами $\mathbf{p}$ і $\mathbf{F}$ у поступальному русі, в обертальному русі твердого тіла також повинен бути аналогічний зв'язок між векторами $\mathbf{L}$ і $\mathbf{M}$.

Тверде тіло будемо вважати системою N матеріальних точок, на які діють як внутрішні $F_{i\text{вн}}$, так і зовнішні $F_{i\text{зв}}$ сили.

Момент імпульсу $\mathbf{L}$ системи матеріальних точок відносно точки O – це векторна сума моментів імпульсів $\mathbf{L}_i$ окремих її точок:

$$L = \sum L_i = \sum [r_i p_i];$$

$$L_i = [r_i p_i]. \quad (4.5)$$

Візьмемо похідну від виразу (4.5) за часом:

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} [r_i p_i] = [\dot{r}_i p_i] + [r_i \dot{p}_i].$$

Добуток

$$[\dot{r}_i p_i] = 0,$$

бо вектори $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ і $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ колінеарні. Крім того,

$$[r_i \dot{p}_i] = [r_i F_i],$$

бо за законом Ньютона

$$\dot{p}_i = F_i, \text{ а } F_i = F_{i_{\text{ЗВ}}} + F_{i_{\text{ВН}}}.$$

Отже, отримаємо таке рівняння:

$$\frac{dL_i}{dt} = [r_i \dot{p}_i] = [r_i F_i]_{\text{ЗВ}} + [r_i F_i]_{\text{ВН}}.$$

Додамо почленно всі N таких рівнянь:

$$\sum \frac{dL_i}{dt} = \frac{dL}{dt} = \sum [r_i \dot{p}_i] = \sum M_{i_{\text{ЗВ}}} + \sum M_{i_{\text{ВН}}},$$

де

$$[r_i F_i]_{\text{ЗВ}} = M_{i_{\text{ЗВ}}}, \quad [r_i F_i]_{\text{ВН}} = M_{i_{\text{ВН}}}.$$

Плече внутрішніх сил, які діють між частинками по прямій, дорівнює нулю, тому й сума моментів усіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum M_{i_{\text{ВН}}} = 0,$$

а

$$\sum M_{i_{\text{ЗВ}}} = M$$

– векторна сума моментів усіх зовнішніх сил відносно точки O , які діють на тіло.

Отже, остаточно

$$\frac{dL}{dt} = M. \quad (4.6)$$

Це **основний закон динаміки обертального руху** для загального випадку: якщо на тіло з закріпленою точкою діють моменти сил, то швидкість зміни моменту імпульсу цього тіла відносно деякої точки дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно цієї точки, які діють на це тіло.

Цей закон подібний до другого закону Ньютона у загальному вигляді:

$$\frac{dp}{dt} = \sum F_i.$$

Рівняння (4.6) називають **рівнянням моментів**, воно стосується будь-кого обертального руху. Моменти імпульсу L і сили M – це величини відносні, прив'язані до певної точки O у просторі, від якої відкладено радіус-вектор r . Звичайно ця точка спільна для всіх цих векторів. Нею, наприклад, може бути початок координат.

4.5. Обчислення моменту інерції твердого тіла

Обчислити момент інерції твердого тіла у загальному випадку – досить складне завдання. Для тіл правильної геометричної форми це простіше.

Наприклад, обчислимо момент інерції циліндра відносно осі, що збігається з геометричною віссю циліндра (рис. 4.8). Масу циліндра m , радіус R і висоту h будемо вважати відомими.

Подумки розіб'ємо циліндр на тонкі циліндричні шари, кожний радіусом r , висотою h і товщиною dr . Масу шару позначимо dm . Момент інерції шару $dI = r^2 dm$.

Елемент маси dm дорівнює добутку густини циліндра ρ на об'єм шару $d\tau$, а цей елементарний об'єм – добутку довжини кола $2\pi r$

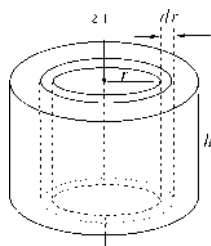


Рис. 4.8. Обчислення моменту інерції циліндра

на висоту шару h і його товщину dr . Отже,

$$dI = r^2 \rho d\tau = r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi h \rho r^3 dr. \quad (4.7)$$

Проінтегруємо цей вираз у межах від 0 до R :

$$I = \int_0^R 2\pi h \rho r^3 dr = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi h \rho}{4} R^4.$$

Проте $\pi R^2 h \rho = m$, тому для моменту інерції циліндра відносно його осі отримаємо формулу

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$

Запишемо без виведення моменти інерції деяких інших тіл.

1. Момент інерції диска радіусом R відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска (рис. 4.9, *а*):

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$

2. Момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його кінець, перпендикулярно до осі циліндра, а також тонкого, довгого стрижня з перерізом довільної форми (рис. 4.9, *б*):

$$I = \frac{1}{3} m h^2,$$

де h – висота циліндра або довжина стрижня.

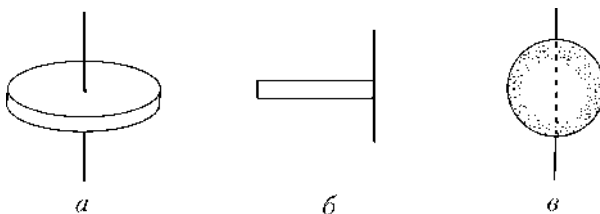


Рис. 4.9. Вісь, відносно якої обчислено момент інерції, проходить через центр диска (*а*), кінець стрижня (*б*), центр кулі (*в*)

3. Момент інерції кулі відносно осі, що проходить через її центр (рис. 4.9, в):

$$I = \frac{2}{5} mR^2,$$

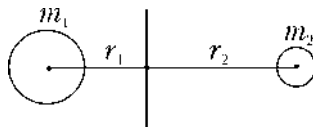
де R – радіус кулі.

4. Момент інерції двохатомної молекули відносно осі, що проходить через центр мас молекули перпендикулярно до лінії, яка сполучає атоми, дорівнює сумі моментів інерції окремих молекул відносно цієї осі (рис. 4.10):

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2,$$

де m_1 і m_2 – маси атомів; r_1 і r_2 – відстані від атомів до центра мас молекули.

Рис. 4.10. Вісь обертання проходить через центр мас двох атомів



Якщо

$$l = r_1 + r_2 \text{ і } \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

то можна довести, що

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = m l^2,$$

де l – відстань між атомами; m – зведена маса атомів.

Моменти інерції складних молекул можна знайти як суму моментів інерції точкових атомів.

4.6. Теорема Штайнера

Момент інерції тіла довільної форми відносно деякої осі можна визначити за **теоремою Штайнера**. Для цього повинен бути відомий момент інерції цього тіла стосовно іншої осі, що паралельна до заданої, яка проходить через центр мас тіла. Сформулюємо цю теорему: *момент інерції тіла I відносно довільної осі O' дорівнює сумі моменту інерції тіла I_C відносно паралельної осі*

O , що проходить через центр маси тіла C , і добутку маси тіла M на квадрат відстані між осями (рис.4.11):

$$I = I_C + a^2 M .$$

Доведення. Маємо довільне тверде тіло з центром мас у точці C (див. рис. 4.11). Через точку C' цього тіла на відстані a від центра мас проведемо вісь O' , а через центр мас тіла – іншу вісь O , паралельну до осі O' . Уявно розіб'ємо тіло на елементарні маси Δm_i , які будемо вважати матеріальними точками.

Розташування елемента маси Δm_i відносно осі O позначимо радіусом-вектором $\mathbf{r}_i$, а відносно осі O' – радіусом-вектором $\mathbf{r}'_i$. Вектори $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}'_i$ і $\mathbf{a}$ лежать у площині, перпендикулярній до осей.

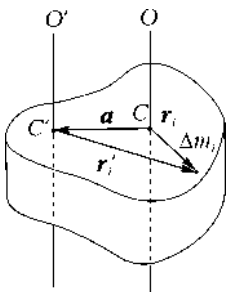


Рис. 4.11. Осі O і O' перпендикулярні до площини, у якій лежать вектори $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ і $\mathbf{a}$

Шукаємо момент інерції тіла відносно осі O' . Для цього спочатку запишемо вираз для радіуса-вектора $\mathbf{r}'_i$:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a} .$$

Піднесемо його до квадрата і помножимо на Δm_i :

$$\Delta m_i \mathbf{r}'_i{}^2 = \Delta m_i \mathbf{r}_i{}^2 - 2\mathbf{a} \Delta m_i \mathbf{r}_i + \mathbf{a}^2 \Delta m_i .$$

Тепер додамо аналогічні рівняння для елементарних мас усього тіла:

$$\sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i{}^2 = \sum \Delta m_i \mathbf{r}_i{}^2 - 2\mathbf{a} \sum \Delta m_i \mathbf{r}_i + \mathbf{a}^2 \sum \Delta m_i . \quad (4.8)$$

Сума

$$\sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i{}^2 = I$$

є моментом інерції тіла відносно осі O' , а

$$\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i{}^2 = I_C ,$$

де I_C – момент інерції тіла відносно осі O , що проходить через центр мас. Згадаємо, що для радіуса-вектора центра мас тіла маємо формулу (2.4):

$$\frac{\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \mathbf{R}_C.$$

У нашому випадку цей вираз набуває вигляду

$$\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i = 0,$$

бо $\mathbf{R}_C = 0$, вісь OC проходить через центр мас тіла.

Отже, з рівняння (4.8) отримуємо теорему Штайнера

$$I = I_C + a^2 M,$$

де $M = \sum \Delta m_i$ є маса тіла.

З теореми випливає, що момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас тіла, найменший для цього напрямку. Що далі вісь обертання від центра мас тіла, то більший момент інерції. Залежно від форми тіла його характеризують одним, двома або трьома моментами інерції відносно перпендикулярних осей, що проходять через його центр мас.

4.7. Вільні осі

Миттєва вісь обертання твердого тіла, закріпленого в одній точці, з часом змінює своє положення. Щоб орієнтація осі обертання була незмінною у просторі, її закріплюють підшипниками. Якщо ж тіло вільно обертається, то його миттєва вісь обертання повинна зберігати своє положення у просторі, бо на тіло не діють ніякі сили. Тому його момент імпульсу не може змінюватися як за величиною, так і за напрямом. Отже, і вісь обертання зберігатиме свою орієнтацію в просторі. У будь-якого твердого тіла є три такі осі обертання, вони проходять через центр мас тіла взаємно перпендикулярно. Це **осі вільного обертання**, вони жорстко пов'язані з тілом і не змінюють орієнтації у просторі без дії на тіло зовнішніх сил. Їх ще називають головними осями інерції.

Для симетричного тіла їх можна легко відшукати. Наприклад, у прямокутного паралелепіпеда ці осі проходять перпендикулярно до граней через їхні центри (рис. 4.12, *а*). У циліндра таких осей багато, одна – це вісь циліндра, інші дві – взаємно перпендикулярні осі, які проходять через бічні сторони перпендикулярно до осі циліндра (рис. 4.12, *б*), у кулі їх безліч.

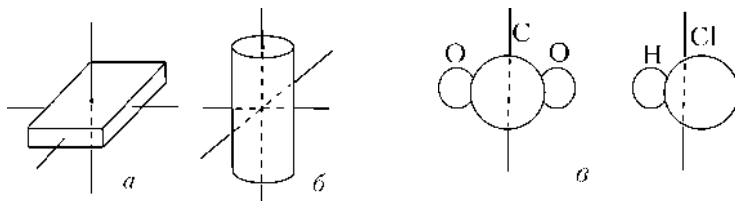


Рис. 4.12. Вільні осі паралелепіпеда (*а*), циліндра (*б*), молекул (*в*)

Обертання твердого тіла найстійкіше, якщо воно відбувається навколо вільної осі з найбільшим моментом інерції, менш стійке – під час обертання навколо осі з мінімальним моментом інерції, і нестійке в разі обертання навколо осі з середнім значенням моменту інерції. Для хіміка тут важливо те, що осі обертання молекул у їхньому тепловому русі є вільними (рис. 4.12, *в*).

Наприклад, розглянемо обертання тонкого циліндра навколо його осі, коли він підвішений за кінець на довгій нитці. За малої

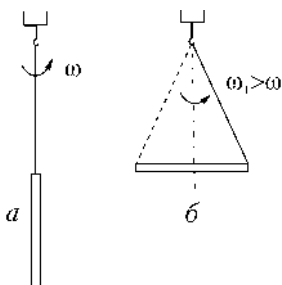


Рис. 4.13. Стійке обертання циліндра за малої (*а*) і великої (*б*) кутових швидкостей

швидкості циліндр обертається навколо своєї геометричної осі, яка розташована вертикально (рис. 4.13, *а*). Збільшивши швидкість обертання, побачимо, що картина обертання зміниться: стійке обертання циліндра відбуватиметься навколо осі, перпендикулярної до осі циліндра (рис. 4.13, *б*).

Це пояснюють тим, що момент інерції у такому випадку максимальний.

4.8. Поняття про тензор інерції

Якщо тверде тіло обертається навколо закріпленої осі, то, як відомо (4.3.2), напрями векторів $\mathbf{L}$ відносно точки, що лежить на осі обертання і кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ у загальному випадку не збігаються. Це спричинює складну поведінку обертальних тіл.

Зв'язок між проекціями векторів $\mathbf{L}$ і $\boldsymbol{\omega}$ загалом відбувається через сукупність коефіцієнтів, яку називають тензором інерції.

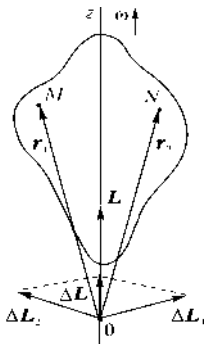


Рис. 4.14. Під час обертання тіла з осьовою симетрією навколо цієї осі вектор $\mathbf{L}$ відносно точки O напрямлений уздовж осі обертання, що проходить через точку O

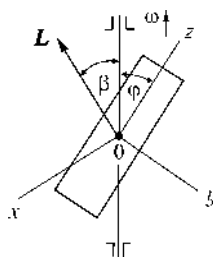


Рис. 4.15. Круглий циліндр обертається навколо закріпленої осі, розташованої під кутом ϕ до осі циліндра z

Щоб з'ясувати це детальніше, розглянемо спочатку часткові випадки обертання твердого тіла навколо закріпленої осі.

1. Припустимо, що осі системи координат жорстко пов'язані з твердим тілом і збігаються з його вільними осями. Нехай, наприклад, цим твердим тілом є однорідне тіло з осьовою симетрією (рис. 4.14), а обертання відбувається навколо осі симетрії (вільної осі). У такому разі, як відомо, вісь обертання не змінює напрями у просторі. За означенням, момент імпульсу твердого тіла відносно точки O

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i].$$

Для кожної точки тіла M знайдеться симетрична точка N (рис. 4.14), тому результуючий момент імпульсу тіла L відносно точки O буде напрямлений уздовж осі обертання

$$L = I\omega$$

і не залежатиме від положення точки O на осі обертання.

2. Припустимо тепер, що осі координат, які жорстко пов'язані з твердим тілом, збігаються з вільними осями тіла, але вектор ω , тобто вісь обертання, утворює деякий кут з віссю координат z , яка є вільною віссю. Наприклад, нехай круглий циліндр обертається навколо закріпленої осі, що проходить через центр мас під деяким кутом ϕ до осі циліндра (рис. 4.15).

У теорії доведено, що напрям і модуль вектора L твердого тіла у цьому разі можна знайти так: вектор кутової швидкості ω розкласти за напрямками трьох головних осей твердого тіла; тоді, після множення кожної компоненти кутової швидкості на момент інерції тіла відносно відповідної осі, отримаємо компоненту вектора моменту імпульсу на цій осі, тобто

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z.$$

Проте $I_x \neq I_y \neq I_z$, тому $\frac{L_x}{\omega_x} \neq \frac{L_y}{\omega_y} \neq \frac{L_z}{\omega_z}$, отже, вектори L і ω

не колінеарні.

3. Складнішим буде зв'язок між векторами L і ω , якщо координатні осі не збігаються з жодною з вільних осей, а вектор ω напрямлений під довільним кутом до будь-якої з цих осей. Тоді, як це доведено у теоретичній механіці, компоненти вектора L так пов'язані з компонентами вектора ω :

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z;$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z;$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z.$$

Коефіцієнти при ω_x , ω_y , ω_z часто записують у формі таблиці-матриці:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Тоді вираз для моменту імпульсу виглядає так:

$$\mathbf{L} = \hat{I} \boldsymbol{\omega}.$$

Тут I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} – моменти інерції тіла відносно відповідних осей (осьові моменти інерції). Недіагональні компоненти, так звані відцентрові моменти інерції, обчислюють за допомогою інтегрування за відповідними формулами. Вони характеризують несиметричність у розподілі мас тіла відносно осі обертання, визначають дію обертового тіла на підшипники цієї осі.

Дев'ять величин I_{ik} ($i, k = x, y, z$) утворюють **симетричний тензор** ($I_{ik} = I_{ki}$) другого рангу, або тензор інерції. Вони залежать від вибору системи координат. Якщо осі координат збігаються з вільними осями, то всі коефіцієнти, крім I_{xx} , I_{yy} і I_{zz} , дорівнюють нулю.

Тензор інерції – це сукупність коефіцієнтів, які пов'язують проекції векторів $\mathbf{L}$ і $\boldsymbol{\omega}$ у перетвореннях системи координат. Компоненти тензора в новій системі лінійно й однорідно можна виразити через його компоненти у старій системі координат. Найпростіші у перетвореннях скаляри – вони просто не змінюються.

Скаляр характеризує лише одна величина, вектор – три компоненти. У перетворенні системи координат кожному компоненту можна виразити трьома старими координатами. Скаляри і вектори – це окремі випадки тензора, у яких перетворення координат має меншу кількість компонент.

Контрольні запитання

1. Що називають моментом сили?
2. Як визначити напрям вектора моменту сили?
3. Яка загальна формула для обчислення моменту інерції тіла?
4. Який фізичний зміст моменту інерції?
5. Яке формулювання теореми Штайнера?
6. Що таке вісь вільного обертання?

7. Коли напрями векторів моменту імпульсу і кутової швидкості твердого тіла збігаються?

8. Що таке тензор інерції?

Приклади розв'язування задач

4.1. На барабані радіусом $R=0,5$ м намотаний шнурок, до кінця якого прив'язане тіло масою $m=10$ кг. Знайдіть момент інерції барабана, якщо відомо, що тіло опускається з прискоренням $a=2,04$ м/с².

Розв'язування. Запишемо рівняння руху тіла. На нього діє сила тяжіння mg , напрямлена вниз, і натяг шнура T , напрямлений угору:

$$ma = mg - T; \quad T = m(g - a).$$

Сила натягу T , що діє на барабан, створює момент сили $M = RT$. Застосуємо основний закон динаміки обертального руху:

$$I\beta = M = RT = m(g - a)R.$$

Кутове прискорення β пов'язане з лінійним a : $\beta = a/R$. Отже, для моменту інерції барабана отримуємо формулу

$$I = \frac{m(g - a)R^2}{a} \Rightarrow I = \frac{10 \cdot (9,81 - 2,04) \cdot 0,5^2}{2,04} = 9,52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4.2. Визначте момент інерції відносно осі симетрії суцільного однорідного тонкого кільця масою $m=0,5$ кг, зовнішній радіус якого $R=0,25$ м, а внутрішній – $0,05$ м.

Розв'язування. Розіб'ємо кільце на елементарні концентричні кільця зі спільним центром усередині кільця, радіусом r і товщиною dr , маса яких dm . Момент інерції одного такого елементарного кільця

$$dI = r^2 dm = r^2 \rho ds,$$

де ρ – маса одиниці площі кільця; $ds = 2\pi r dr$. Оскільки

$$\rho = \frac{m}{s} = \frac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)},$$

то

$$dI = r^2 \frac{m}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} 2\pi r dr = \frac{2m}{R_1^2 - R_2^2} r^3 dr.$$

Проінтегрувавши останній вираз за змінною r у межах від R_1 до R_2 , отримаємо шуканий момент інерції тонкого кільця:

$$I = \frac{2m}{R_1^2 - R_2^2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{mr^4}{2(R_1^2 - R_2^2)} \Big|_{R_1}^{R_2} = \frac{m(R_1^2 + R_2^2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{0,5(0,25^2 + 0,05^2)}{2} = 0,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Задачі

4.1. Колесо, момент інерції якого $I=50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega=20 \text{ рад/с}$. Знайдіть гальмівний момент сили M , під дією якого колесо зупиниться через $t=10 \text{ с}$.

Відповідь: $M=100 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

4.2. Махове колесо радіусом $R=0,2 \text{ м}$ і масою $m=10 \text{ кг}$ сполучене з мотором за допомогою пасової передачі. Натяг паса, який обертається без ковзання, сталий: $T=14,7 \text{ Н}$. Яку кількість обертів за 1 с зробить махове колесо через $t=10 \text{ с}$ після початку руху? Махове колесо вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

Відповідь: $n=23,4 \text{ об/с}$.

4.3. До обода однорідного диска радіусом $R=0,2 \text{ м}$ прикладена дотична сила $F=98,1 \text{ Н}$. Під час обертання на диск діє момент сил тертя $M_T=4,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Знайдіть масу диска, якщо диск обертається зі сталим кутовим прискоренням $\beta=100 \text{ рад/с}^2$.

Відповідь: $m=7,36 \text{ кг}$.

Розділ 5 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

У фізиці є величини, які для замкнених систем за будь-яких процесів, що відбуваються в них, завжди незмінні. З них у механіці важливі енергія, імпульс і момент імпульсу. Закони їхнього збереження фундаментальні і стосуються не лише механіки, а й усіх явищ природи, вони справджуються як у класичній і релятивістській фізиці, так і у фізиці мікросвіту. Ці закони пов'язані з властивостями часу і простору.

5.1. Закон збереження імпульсу

Розглянемо систему N тіл, які рухаються з різними швидкостями у різні боки внаслідок дії на них внутрішніх і зовнішніх сил. Нехай на i -те тіло діє сила $\mathbf{F}_{ik}$ з боку k -го тіла і зовнішні сили, рівнодійною яких є $\mathbf{F}_i$.

Запишемо рівняння руху для всіх N тіл:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \dots + \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_1;$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \dots + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_2;$$

.....

$$\frac{d\mathbf{p}_N}{dt} = \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{N2} + \dots + \mathbf{F}_{N(N-1)} + \mathbf{F}_N.$$

Додамо всі N рівнянь. Оскільки для внутрішніх сил за третім законом Ньютона

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki},$$

то

$$\sum \mathbf{F}_{ik} = 0.$$

Звідси отримаємо таке співвідношення:

$$\sum \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{F}_i. \quad (5.1)$$

Якщо система замкнена, тобто на неї не діють зовнішні сили, то

$$\sum \mathbf{F}_i = 0.$$

Векторну суму імпульсів тіл системи назовемо **імпульсом системи $\mathbf{P}$**

$$\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{P}.$$

Тоді формулу (5.1) перепишемо так:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \quad (5.1, a)$$

Звідси випливає, що імпульс замкненої системи

$$\mathbf{P} = \text{const}.$$

Повний імпульс замкненої системи тіл не змінюється з часом ні за модулем, ні за напрямом. Це **закон збереження імпульсу**. Він діє і для незамкнених систем, якщо векторна сума всіх зовнішніх сил, які діють на цю систему, дорівнює нулю, наприклад, якщо рух тіл відбувається по горизонтальній площині без тертя.

Векторність рівняння (5.1, a) означає, що воно виконується і для проекції вектора $\mathbf{P}$ на довільний напрям: якщо сума проєкцій зовнішніх сил на якийсь напрям дорівнює нулю, то проєкція імпульсу на цей напрям стала.

Закон збереження імпульсу – це один з головних висновків, який випливає з законів руху.

В основі закону збереження імпульсу є однорідність простору, тобто однаковість властивостей простору у всіх його точках. Паралельне перенесення замкненої системи тіл без зміни їхнього взаємного розташування і швидкостей не змінює механічних властивостей системи.

Закон збереження імпульсу має важливе значення і практичне застосування. На підставі цього закону можна пояснити рух ракети, реактивних літаків, кальмарів, спрутів, медуз.

Якщо система не замкнена, то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_j.$$

Цей вираз відображає, що *швидкість зміни імпульсу системи дорівнює векторній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.*

Зазначимо, що тут векторну суму $\sum \mathbf{F}_j$ не можна замінити рівнодієюю, бо сили $\mathbf{F}_j$ діють на різні тіла. Сукупність сил, які діють на тверде тіло, можна замінити рівнодієюю лише тоді, коли вони паралельні або коли лінії, вздовж яких діють сили, перетинаються в одній точці.

5.2. Закон збереження моменту імпульсу

Момент імпульсу системи тіл – це векторна сума моментів імпульсів усіх тіл системи відносно деякої точки:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i,$$

де $\mathbf{L}_i$ – момент імпульсу i -го тіла. Запишемо рівняння моментів (4.6) для системи тіл:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Якщо система замкнена, то момент зовнішніх сил $\mathbf{M} = 0$, тоді

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0,$$

звідки

$$\mathbf{L} = \text{const}.$$

Отже, маємо **закон збереження моменту імпульсу**: *у замкненій системі тіл векторна сума моментів імпульсів усіх тіл відносно деякої точки є сталою.*

Цей закон діє і в незамкнених системах, коли проекція моменту сили на деякий напрям дорівнює нулю; тоді момент імпульсу системи для цього напрямку сталий.

В основі цього закону є ізоτροпія простору – однаковість властивостей простору у різних напрямках. Повертання замкнутої

системи тіл без зміни їхньої конфігурації і відносних швидкостей не змінює їхніх механічних властивостей.

Якщо тіло рухається в полі **центральної сили** під дією цих сил, то момент сили, що діє на тіло, дорівнює нулю, бо сили діють по прямій, яка сполучає тіло з центром сил. Тому тут момент імпульсу тіла сталий. Прикладом такого руху є рух супутників, траєкторія яких – еліпс. Земля не передає моменту сили на супутник, тому його момент імпульсу сталий. Там, де радіус-вектор супутника більший, – його швидкість менша. Звідси випливає, що *радіус-вектор супутника за однакові проміжки часу описує однакові площі (закон площі)*.

Дію закону збереження моменту імпульсу можна продемонструвати на багатьох прикладах. Відомий дослід з обертальним кріслом. Людина сидить у кріслі і тримає у руках масивні гантелі (рис. 5.1). Надамо кріслу обертального руху з кутовою швидкістю ω_1 ; коли руки людини широко розведені, момент інерції системи великий і дорівнює I_1 . Вагу крісла з людиною зрівноважує реакція опори. Силою тертя будемо нехтувати. Отже, людину в кріслі з гантелями вважатимемо замкненою системою, момент імпульсу якої дорівнює $I_1\omega_1$. Якщо тепер під час обертання людина складе руки на груди, то момент інерції системи зменшиться і дорівнюватиме I_2 , а за законом збереження моменту імпульсу не може змінитися, тобто $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$. Отже, кутова швидкість обертання збільшиться. Зазначимо, що кінетична енергія обертального руху також збільшиться, бо вона пропорційна моменту інерції і квадрату кутової швидкості. Коли руки людини наближаються до осі обертання, то доцентрові сили (людина) виконують роботу, завдяки якій і збільшується кінетична енергія обертання.

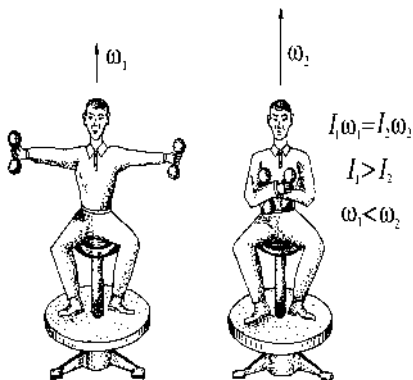


Рис. 5.1. Під час складання рук на груди кутова швидкість обертання збільшується, бо зменшується момент інерції системи, а добуток $I\omega$ повинен бути сталим

Цей закон застосовують спортсмени, акробати, балерини під час виконання різних вправ, пов'язаних зі зміною кутової швидкості їхнього обертання навколо вертикальної чи горизонтальної осі. Змінюючи момент інерції свого тіла, вони змінюють кутову швидкість обертання. Переміщення великих мас по поверхні Землі (повені, виверження вулканів) також зумовлюють незначну зміну моменту інерції Землі і, внаслідок цього, деяку зміну швидкості її обертання навколо осі (на тисячні частки секунди за добу).

5.3. Поняття про гіроскоп

Властивість зберігати незмінним момент імпульсу (орієнтацію осі обертання) має вільний гіроскоп. Це масивне симетричне тіло з великим моментом інерції, яке швидко обертається навколо однієї з вільних осей. Якщо сила тяжіння і сила реакції гіроскопа прикладені до центра мас гіроскопа, то вони взаємно зрівноважені і тоді момент імпульсу зберігає свій напрям. Такий гіроскоп називають вільним. Своєрідними гіроскопами є снаряди, ротори, турбіни та інші обертові тіла з масою, яка симетрично розподілена відносно осі обертання. Найважливіша властивість гіроскопа виявляється в такому: якщо під час обертання до його осі обертання прикласти момент сил, який намагається повернути вісь у напрямі, перпендикулярному до осі обертання, то гіроскоп буде повертатися навколо третьої осі, перпендикулярної до перших двох (гіроскопічний ефект). Наведена властивість впливає з формули (4.6), з якої видно, що коли момент сили діє лише короткий проміжок часу Δt , то $\Delta \mathbf{L} = \mathbf{M} \Delta t$. Це свідчить про таке: внаслідок короточасної дії моменту сили вектор $\mathbf{L}$ повертається у напрямі вектора $\Delta \mathbf{L}$, напрям якого не збігається з напрямом сили, що діє, а перпендикулярний до неї; і властиве лише обертальним системам.

Гіроскоп застосовують у навігації в автопілотах, де за його допомогою автоматично підтримують заданий курс літака, ракети, торпеди, а також як гіроскопічний компас, який має переваги перед звичайним компасом у тому, що на нього не впливають магнітні бурі, хитання корпусу тощо.

5.4. Енергія, робота, потужність

Дати точне коротке означення поняття енергії дуже складно. Різним видам процесів відповідають різні форми енергії, бо вона пов'язана з параметрами, що характеризують процес. Можна, наприклад, сказати, що енергія є загальною мірою різних процесів і видів взаємодій. Розрізняють механічну, електричну, хімічну, внутрішню, ядерну та інші форми енергії. Механічну енергію має кинутий камінь, стиснута пружина, електричну – заряджений провідник, хімічну – хімічне паливо чи глюкоза, енергія яких міститься в енергії хімічного зв'язку атомів у молекулах тощо.

Головна властивість енергії така: *енергія ніколи не зникає безслідно і не з'являється з нічого, вона лише може перетворюватися з однієї форми в іншу.*

Енергія виявляється в роботі. **Робота**, яку виконує сила під час переміщення тіла, є *мірою зміни енергії тіла під дією сили*. Робота – величина скалярна, її визначають як *добуток сили, що діє на тіло у напрямі руху, на переміщення*:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{s} = F ds \cos \alpha,$$

де α – кут між напрямом переміщення і дії сили; $d\mathbf{s}$ – переміщення.

Роботу можна записати ще так:

$$\delta A = F_s ds,$$

де F_s – проекція сили на напрям переміщення. Вся робота, виконана змінною силою під час переміщення тіла на шляху s , дорівнює інтегралові, який треба брати по кривій лінії шляху s :

$$A = \int_s \mathbf{F} d\mathbf{s} \cos \alpha = \int_s F_s ds.$$

Якщо $\alpha < \pi/2$, то $A > 0$, тобто сила виконує додатну роботу, якщо ж $\alpha > \pi/2$, то $A < 0$, і робота від'ємна, зовнішня сила гальмує рух тіла.

Геометрична інтерпретація роботи сили зображена на рис. 5.2. Елементарна робота δA зображена тут елементарною трапецією, а вся робота – заштрихованою фігурою.

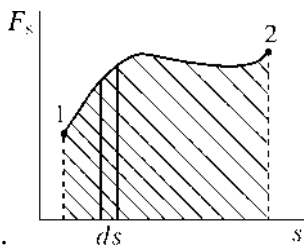


Рис. 5.2. Геометрична інтерпретація роботи. Елементарна робота δA зображена тут елементарною трапецією

Одиницею роботи є джоуль (Дж). Один джоуль – це така робота, яку виконує сила в один ньютон на шляху один метр у напрямі переміщення.

Потужність – це величина, яка характеризує швидкість виконання роботи. Вона чисельно дорівнює роботі, виконаній за одиницю часу:

$$N = \frac{A}{t}.$$

Якщо сила виконує роботу нерівномірно, то для потужності N треба записати

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Потужність визначена силою і швидкістю, з якою сила виконує роботу. Справді,

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F ds \cos \alpha}{dt} = Fv \cos \alpha.$$

Що більша швидкість виконання силою роботи, то більша потужність. Одиницею потужності є ват (Вт). Один ват – це така потужність, коли за 1 с виконується робота в 1 Дж.

5.5. Кінетична енергія поступального руху

Кінетична енергія – це енергія механічного руху тіла, вона чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб спричинити цей рух.

Нехай сила $\mathbf{F}$ діє на тіло і зумовлює зміну його руху (наприклад, прискорює або сповільнює його рух); це означає, що робота цієї сили витрачається на зміну кінетичної енергії тіла:

$$\delta A = dW,$$

де W – кінетична енергія тіла. Однак

$$\delta A = F ds = m a ds = m \frac{dv}{dt} ds = m v dv = dW .$$

Отже,

$$m v dv = dW .$$

Проінтегрувавши цей вираз у межах від v_1 до v_2 :

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} ,$$

знайдемо, що

$$A = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = W_2 - W_1 = \Delta W , \quad (5.2)$$

де ΔW – зміна кінетичної енергії тіла. Отже, для кінетичної енергії тіла маємо

$$\frac{m v^2}{2} = W .$$

Формула (5.2) відображає зміст **теорему про кінетичну енергію**: *робота рівнодійної всіх сил, що діють на тіло, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла.*

Оскільки імпульс тіла $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$, то кінетичну енергію можна виразити ще так:

$$W = \frac{p^2}{2m} .$$

Кінетична енергія – величина відносна, у різних рухомих системах відліку вона різна. Значення має лише зміна кінетичної енергії, яка завжди дорівнює роботі у будь-якій системі відліку.

Одиницею енергії тіла, як і роботи, є джоуль.

5.6. Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Припустимо, що тіло обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω . Кожен елемент маси цього тіла Δm_i має

лінійну швидкість $v_i = \omega R_i$, де R_i – відстань від осі обертання до елемента Δm_i . Кінетична енергія цього елемента

$$\Delta W_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i R_i^2 \omega^2.$$

Додавши аналогічні вирази для всіх елементів тіла, отримаємо такий вираз для кінетичної енергії тіла:

$$W = \sum \Delta W_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum R_i^2 \Delta m_i = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Отже, кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі,

$$W = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) нагадує формулу для кінетичної енергії поступального руху. Тут момент інерції I відіграє роль маси тіла, а кутова швидкість ω – лінійної швидкості.

Якщо вісь обертання тіла переміщується поступально зі швидкістю v (куля котиться по горизонтальній площині), то кінетична енергія тіла

$$W = \frac{I \omega^2}{2} + \frac{m v^2}{2},$$

де m – маса тіла.

5.7. Консервативні сили

Серед різноманітних сил природи є клас сил, який має специфічну властивість: *робота цих сил не залежить від форми шляху, по якому вони діють, а лише від положення точок початку і кінця руху*. Ці сили називають **консервативними** (потенціальними), а поле таких сил – консервативним.

Для роботи консервативних сил під час переміщення тіла з положення A у положення B (рис. 5.3) по шляху ACB або ADB можемо записати:

$$A_{AB} = \int_{ACB} F ds = \int_{ADB} F ds = \text{const}. \quad (5.4)$$

Але

$$A_{ACB} = A_{ADB} = -A_{BDA},$$

тобто

$$A_{ACB} + A_{BDA} = 0.$$

Це означає, що *робота консервативних сил по замкнутому шляху дорівнює нулю*:

$$\oint Fds = 0. \quad (5.5)$$

Кільце на знакові інтегралу означає, що інтеграл треба брати по замкнутому шляху. Формула (5.5) є **математичним вираженням консервативності (потенціальності) поля сил**. Приклад консервативних сил – гравітаційні, пружні та електростатичні сили.

Робота сил тертя залежить від форми шляху, по якому вони виконують роботу. Це не консервативні (дисипативні) сили, вони завжди напрямлені у протилежний бік щодо швидкості відносно руху тіл, тобто гальмують рух.

Справді, якщо, наприклад, сила тертя є сталою на шляху s , то тіло, рухаючись зі сталою швидкістю по великому шляху, потребує більшого часу на його проходження, тому виконає більшу роботу, ніж по короткому шляху між двома точками. Отже, сили тертя не консервативні.

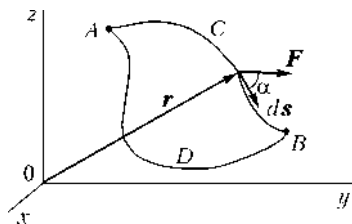


Рис. 5.3. У полі консервативних сил робота по шляхах C і D однакова

5.8. Потенціальна енергія

Із визначення консервативних сил випливає, що робота таких сил є однозначною функцією положення точок прикладання цих сил. Однак робота – це зміна енергії тіла. Тому кожній точці простору, де діють консервативні сили, можна поставити у відповід-

ність таку скалярну функцію координат $\Pi(x, y, z)$, що має розмірність роботи, зменшення якої буде дорівнювати роботі, виконаній консервативними силами, тобто

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{s} = -(\Pi_2 - \Pi_1).$$

Функцію $\Pi(x, y, z)$ називають потенціальною енергією тіла у полі консервативних сил.

Потенціальна енергія – це енергія взаємодії системи тіл, яка залежить від розташування тіл або частин одного тіла. Вона завжди пов'язана з існуванням силових потенціальних полів, тобто тіло має потенціальну енергію лише у полі потенціальних сил, створеному іншим тілом чи системою тіл. Немає сенсу говорити про потенціальну енергію одного відокремленого тіла, якщо воно не взаємодіє з іншими тілами.

Єдиної формули для потенціальної енергії немає, бо вона залежить від виду взаємодії між тілами.

Якщо консервативні сили, що діють між тілами системи, виконують роботу над цими тілами, то кажуть, що система змінила свій стан, тобто потенціальну енергію, і тоді можемо записати:

$$A = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi.$$

Зміна потенціальної енергії системи завжди дорівнює виконаній консервативними силами роботі з оберненим знаком, або, інакше кажучи, робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи.

Потенціальна енергія – величина відносна, її визначають з точністю до константи, важливою є лише зміна потенціальної енергії, а не сама енергія. За нульове беруть значення потенціальної енергії, яке відповідає такому положенню тіл, що взаємодіють, коли вони перебувають на нескінченості.

5.9. Потенціальна енергія у деяких випадках

5.9.1. Потенціальна енергія у полі тяжіння Землі

Розглянемо переміщення тіла масою m з точки 1 (висота h_1) у точку 2 (висота h_2) під дією сили тяжіння (наприклад, згори скочується камінь). Знайдемо роботу сил тяжіння (рис. 5.4) :

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{s} = \int_1^2 F ds \cdot \cos \alpha = \int_1^2 F dh ,$$

де

$$dh = ds \cos \alpha .$$

Підставимо сюди значення сили тяжіння $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$ (знак мінус означає притягання тіл), й отримаємо

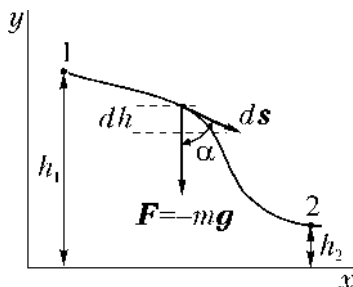


Рис. 5.4. Робота сили тяжіння залежить лише від різниці висот ($h_1 - h_2$)

$$A = \int_1^2 (-mg) dh = -[mgh_2 - mgh_1] = -[\Pi_2 - \Pi_1] = -\Delta\Pi ,$$

де

$$\Pi = mgh \quad (5.6)$$

– потенціальна енергія тіла у полі тяжіння. Висоту h відраховують від рівня відліку.

Отже, робота сил тяжіння не залежить від форми шляху, по якому відбувалось переміщення тіла, а лише від різниці висот, тобто від положення точок прикладання сили. *Сили тяжіння консервативні.*

5.9.2. Потенціальна енергія тіла у гравітаційному полі

Вираз “потенціальна енергія тіла в деякому полі” означає потенціальну енергію взаємодії системи тіл, які утворюють поле, з тілом, що перебуває у цьому полі. Знайдемо потенціальну енергію тіла в гравітаційному полі.

Запишемо закон всесвітнього тяжіння у векторному вигляді:

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{mM}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} .$$

Нехай тіло масою m рухається під дією гравітаційних сил у гравітаційному полі, створеному іншим тілом масою M .

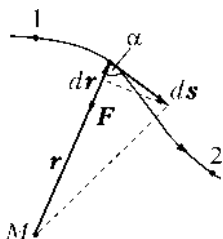


Рис. 5.5. Дія гравітаційної сили на рухому матеріальну точку

Елементарна робота гравітаційних сил під час переміщення цього тіла на шляху ds (рис. 5.5)

$$\delta A = \mathbf{F} ds = F ds \cos \alpha = F dr ,$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор рухомого тіла. Підставимо у цю формулу вираз для сили F :

$$\delta A = -G \frac{mM}{r^2} dr .$$

Проінтегруємо її у межах від r_1 до r_2 :

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - \left[G \frac{mM}{r_1} - G \frac{mM}{r_2} \right] ; \quad (5.7)$$

$$A = \Pi_1 - \Pi_2 = -\Delta \Pi ,$$

де

$$\Pi = -G \frac{mM}{r} . \quad (5.8)$$

Як відомо, потенціальну енергію визначають з точністю до довільної адитивної сталої, бо робота, обчислена за формулою (5.7), не змінюється внаслідок додавання довільної константи до виразу для потенціальної енергії. Звичайно цю константу приймають за нуль, вважаючи, що потенціальна енергія тіла на безмежності дорівнює нулю. Це називають нормуванням потенціальної енергії. Застосовують різні способи нормування. Наприклад, формула (5.8) відрізняється від формули (5.6) тим, що у ній використано інший спосіб нормування потенціальної енергії: у випадку формули (5.6) потенціальна енергія дорівнює нулю, коли $h=0$, тобто на поверхні Землі. Якщо до формули (5.8) застосувати такий спосіб нормування, як до формули (5.6), то вирази для потенціальної енергії в обох випадках будуть збігатися. Справді, якщо R_3 – радіус Землі і $h < R_3$, то формула (5.7) переходить у вираз

$$A = -GmM \left(\frac{1}{R_3 + h} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$i \quad \Pi = GmM \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_3 + h} \right) = GmM \left(\frac{R_3 + h - R_3}{R_3(R_3 + h)} \right) \approx \\ \approx \frac{GmM}{R_3^2} h = mgh.$$

Уведемо поняття про гравітаційний потенціал поля:

$$\varphi = \frac{\ddot{I}}{m} = -G \frac{M}{r}.$$

Гравітаційний потенціал – це енергетична характеристика гравітаційного поля, він чисельно дорівнює потенціальній енергії тіла масою 1 кг, поміщеного у задану точку поля, тобто роботі переміщення тіла масою 1 кг з цієї точки поля у нескінченність.

З формули (5.6) випливає, що робота гравітаційних сил по замкненому шляху, тобто коли $r_1 = r_2$, дорівнює нулю:

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0.$$

Отже, гравітаційні сили консервативні.

5.9.3. Потенціальна енергія пружної деформації

Пружно деформоване тіло має потенціальну енергію, яка є енергією взаємного розташування частин тіла. Стиснувши пружину, ми виконаємо певну роботу. Відпустивши стиснуту пружину, побачимо, що вона здатна переміщати деяке тіло, тобто пружні сили можуть виконувати роботу. Ця робота чисельно дорівнює потенціальній енергії деформованої пружини. Знайдемо роботу пружних сил:

$$A = \int F dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right) = -\Delta\Pi.$$

Ця робота дорівнює зміні потенціальної енергії деформованої пружини. Отже, потенціальна енергія деформованої пружини

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.9)$$

де x – деформація пружини.

Виразимо цю енергію інакше, увівши модуль Юнга. Оскільки

$$k = \frac{ES}{l},$$

то отримаємо такий вираз для потенціальної енергії пружно деформованого тіла:

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2.$$

Отже, потенціальна енергія пружно деформованого тіла прямо пропорційна модулю Юнга і квадрату деформації тіла.

Як бачимо, у всіх випадках робота консервативних сил виконується завдяки зменшенню потенціальної енергії системи.

Згадаємо, що гравітаційне поле і поле пружних сил є полем центральних сил. Будь-яке поле центральних сил потенціальне.

5.10. Зв'язок між потенціальною енергією і консервативною силою

У параграфі 5.7 зазначено, що кожній точці потенціального поля можна поставити у відповідність силу, яка діє на тіло, розташоване у цій точці, і потенціальну енергію. Це означає, що між силою і потенціальною енергією повинен бути зв'язок. Знайдемо його.

Якщо тіло рухається у полі консервативних сил під дією цих сил, то сили поля виконують роботу

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{s} = F_x \cdot dx,$$

де F_x і dx – проекції на вісь x сили і переміщення. Однак робота консервативної сили дорівнює спаду потенціальної енергії, тобто

$$\delta A = -d\Pi,$$

тому

$$F_x dx = -d\Pi,$$

або точніше

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

бо похідну за x -м обчислюємо за умови, що y і z сталі. Для загального випадку отримуємо такі співвідношення:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Як бачимо, $\partial \Pi / \partial x$, $\partial \Pi / \partial y$, $\partial \Pi / \partial z$ є компонентами сили на відповідних координатних осях; Π – скалярна функція координат. Отже, для сили можемо записати такий вираз:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Уведемо векторну величину – **градієнт функції Π** :

$$\text{grad} \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Напрямок вектора $\text{grad} \Pi$ збігається з напрямом найбільшого зростання скаляра Π . Тоді для сили $\mathbf{F}$ можемо записати

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \Pi.$$

Отже, сила, яка діє на тіло в полі консервативних сил, дорівнює градієнту потенціальної енергії тіла, взятому з оберненим знаком.

5.11. Закон збереження механічної енергії

Розглянемо замкнену систему матеріальних тіл, між якими діють різні сили: тяжіння, пружності, електростатичні, хімічні, тертя тощо. Якби сили не діяли між тілами системи, їхня робота завжди дорівнює зміні кінетичної енергії тіл системи, тобто

$$\Delta A = \Delta W.$$

З усіх сил, які діють між тілами системи виділимо такі, робота яких іде лише на зміну потенціальної енергії системи. Це консервативні сили. Рівняння роботи перепишемо так:

$$\Delta A = \Delta A_{\kappa} + \Delta A_{\partial},$$

де ΔA_k – робота консервативних сил; ΔA_o – робота інших, не консервативних (дисипативних) сил.

Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи:

$$\Delta A_k = -\Delta \Pi ,$$

тому для роботи дисипативних сил отримуємо

$$\Delta A_o = \Delta A - \Delta A_k = \Delta W + \Delta \Pi = \Delta(W + \Pi), \quad (5.10)$$

де $W + \Pi$ – **повна механічна енергія** системи.

Отже, якщо між тілами замкненої системи, крім консервативних, діють ще дисипативні сили, то зміна повної механічної енергії системи дорівнює роботі дисипативних сил. Це означає, що частина механічної енергії системи перетворюється у внутрішню енергію тіл (нагрівання тіл і середовища, у якому перебувають тіла, збудження атомів, утворення хімічних зв'язків між атомами у молекулах тощо).

Припустимо, що в системі діють лише консервативні сили, тоді $\Delta A_o = 0$ і

$$\Delta(W + \Pi) = 0,$$

отже,

$$W + \Pi = \text{const}.$$

Ця формула відображає **закон збереження механічної енергії**. Сформулюємо його: *у замкненій системі тіл, між якими діють лише консервативні сили, сума кінетичної і потенціальної енергії є сталою.*

Закон збереження енергії пов'язаний з однорідністю часу, тобто інваріантністю (незмінністю) фізичних законів щодо вибору початку відліку часу. Наприклад, якщо тіло вільно падає, то немає значення, коли це відбувається: вранці чи ввечері.

Контрольні запитання

1. Що називають імпульсом системи тіл?
2. Яке формулювання закону збереження моменту імпульсу? Наведіть приклади його застосування.
3. Що таке робота сили?

4. Що характеризує потужність?
5. Яке формулювання теореми про кінетичну енергію?
6. Яка формула математичної ознаки консервативності поля сил?
7. Чому нема єдиної формули потенціальної енергії?
8. Яке формулювання закону збереження механічної енергії?

Приклади розв'язування задач

5.1. Два човни однакової маси $M=150$ кг плывуть один за одним з однаковою швидкістю $v_0=3$ м/с. Із переднього човна на задній перекидають предмет масою $m=10$ кг зі швидкістю $u=8$ м/с відносно переднього човна. Знайдіть швидкість човнів після перекидання предмета.

Розв'язування. Два човни і предмет утворюють систему тіл, яку будемо вважати замкненою і до якої застосуємо закон збереження імпульсу. Початковий стан системи – це стан до перекидання предмета, її імпульс

$$p_0 = 2Mv_0 + mv_0.$$

Другий стан: предмет перебуває в польоті, тоді імпульс системи

$$p_1 = m(v_1 - u) + Mv_1 + Mv_0,$$

де v_1 – швидкість переднього човна після викидання предмета. Третій стан: предмет потрапив у задній човен. Імпульс системи у цьому стані

$$p_2 = (M + m)v_2 + mv_1.$$

Тут v_2 – швидкість заднього човна після потрапляння у нього предмета. У замкненій системі тіл імпульс не змінюється. Отже, маємо два рівняння з двома невідомими:

$$(2M + m)v_0 = m(v_1 - u) + Mv_1 + Mv_0;$$

$$(2M + m)v_0 = (M + m)v_2 + Mv_1.$$

З першого рівняння знаходимо v_1 :

$$2Mv_0 + mv_0 - Mv_0 = mv_1 + mu + Mv_1;$$

$$(M + m)v_1 = (M + m)v_0 + mu;$$

$$v_1 = v_0 + \frac{mu}{M + m} \Rightarrow v_1 = 3 + \frac{8 \cdot 10}{160} = 3,50 \text{ м/с}.$$

Підставивши значення v_1 у друге рівняння, визначимо v_2 :

$$2Mv_0 + mv_0 = (M + m)v_2 + \frac{Mm}{M + m}u + Mv_0;$$

$$v_2 = v_0 - \frac{Mm}{(M + m)^2}u \Rightarrow v_2 = 3 - \frac{150 \cdot 10}{160^2} \cdot 8 = 2,53 \text{ м/с}.$$

5.2. Дві дівчинки масою по $m=40$ кг розташувалися на діаметрально протилежних краях круглої платформи масою $M=80$ кг, яка обертається з частотою 12 об/хв. Одна з дівчаток перейшла до центра платформи. Як зміниться частота обертання платформи? Платформу вважити круглим диском, а дівчаток – точковими масами.

Розв'язування. Платформу з дівчатками вважатимемо замкненою системою і застосуємо до неї закон збереження моменту імпульсу:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \quad (1)$$

Тут I_1 – момент інерції платформи і дівчаток, коли вони обидві стоять на краях платформи; I_2 – момент інерції платформи й дівчинки, яка залишилась на краю; ω_1 і ω_2 – кутові швидкості обертання платформи з дівчатками в першому і другому положенні. До того ж,

$$I_1 = \frac{MR^2}{2} + 2mR^2, \quad I_2 = \frac{MR^2}{2} + mR^2,$$

де R – радіус платформи. Підставивши значення I_1 і I_2 у рівняння (1) і беручи до уваги, що $\omega=2\pi n$, де n – частота обертання платформи, отримаємо

$$\left(\frac{MR^2}{2} + 2mR^2 \right) 2\pi n_1 = \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2 \right) 2\pi n_2,$$

або

$$\left(\frac{M}{2} + 2m \right) n_1 = \left(\frac{M}{2} + m \right) n_2,$$

звідки

$$n_2 = \frac{M + 4m}{M + 2m} n_1 \Rightarrow n_2 = 12 \frac{80 + 160}{80 + 80} = 18 \text{ об/хв}.$$

5.3. Куля масою $m=2$ кг котиться без ковзання по підлозі зі швидкістю $v_1=15$ см/с, ударяється до стіни і відкочується від неї зі швидкістю $v_2=8$ см/с. Яка кількість теплоти виділилась під час удару?

Розв'язування. Енергія кулі складається з кінетичних енергій поступального та обертального рухів. До удару до стінки для кінетичної енергії кулі маємо вираз

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

Після удару

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2}.$$

Тут $I=2/5mR^2$ – момент інерції кулі, $\omega_1 = v_1 / R$ і $\omega_2 = v_2 / R$ – кутова швидкість кулі до і після удару об стінку. Кількість теплоти, яка виділилась під час удару, дорівнює різниці кінетичних енергій кулі до і після удару:

$$\begin{aligned}\Delta W = W_1 - W_2 &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{2 \cdot mv_1^2}{5 \cdot 2} - \left(\frac{mv_2^2}{2} + \frac{2mv_2^2}{5 \cdot 2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta W &= \frac{7}{10} m(v_1^2 - v_2^2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta W &= \frac{7}{10} \cdot 2(0,15^2 - 0,08^2) = 22,54 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}\end{aligned}$$

Задачі

5.1. Вантаж масою 10 кг піднімають на висоту 10 м, діючи силою 196 Н. Яку роботу виконано?

Відповідь: 1960 Дж.

5.2. Віконну фіранку масою 1 кг і довжиною 2 м скручують на тонкий валик угорі вікна. Знехтувавши тертям, знайдіть виконану роботу.

Відповідь: 9,8 Дж.

5.3. Камінь масою 2 кг упав з деякої висоти. Падіння тривало 1,43 с. Визначте кінетичну і потенціальну енергії каменя в середній точці шляху. Опором повітря знехтувати.

Відповідь: $W=П=98,1$ Дж.

5.4. Тіло масою $m_1=2$ кг рухається назустріч іншому тілу масою $m_2=1,5$ кг по горизонтальній площині, і вони непружно вдаряються. Швидкість тіл безпосередньо перед зіткненням становила, відповідно, $v_1=1$ м/с і $v_2=2$ м/с. Скільки часу будуть рухатися ці тіла після зіткнення, якщо коефіцієнт тертя $\kappa=0,05$?

Відповідь: 0,58 с.

5.5. Куля, що летить горизонтально, потрапляє у вантаж, підвішений на жорсткому легкому стрижні і застряє в ньому. Маса кулі у 1000 разів менша від маси вантажу. Відстань від точки підвісу стрижня до центра вантажу дорівнює 1 м. Визначте швидкість кулі, якщо відомо, що стрижень відхилився від удару кулі на кут $\alpha=10^\circ$.

Відповідь: 550 м/с.

5.6. Граната, що летіла зі швидкістю 10 м/с, розкололася на два уламки. Більший уламок, маса якого становила 60% від маси всієї гранати, продовжував рухатись у попередньому напрямі, але зі швидкістю 25 м/с. Визначте швидкість меншого уламка.

Відповідь: -12,5 м/с.

5.7. Людина масою 60 кг біжить зі швидкістю 8 км/год, наздоганяє візок масою 80 кг, що рухається у тому ж напрямі зі швидкістю 2,9 км/год, і вскакує на нього. З якою швидкістю буде рухатися візок?

Відповідь: 5,14 км/год.

5.8. Горизонтальна платформа масою 90 кг обертається з кутовою швидкістю $\omega=52$ рад/с навколо осі, що проходить через центр платформи. Хлопець масою 50 кг стоїть на краю платформи. З якою кутовою швидкістю буде обертатися платформа, якщо хлопець перейде від краю платформи до її центра? Платформу вважати круглим диском, а хлопця – точковою масою.

Відповідь: 1,10 рад/с.

Розділ 6

ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Закони збереження, зокрема енергії, всеосяжні, невідомо жодного випадку, щоб цей закон не виконувався. Сьогодні наперед відомо, що які б відкриття не відбулися, закон збереження енергії не буде порушений.

Грунтуючись на законі збереження енергії, вчені дійшли висновку про існування різних видів енергії – теплової, електричної, ядерної тощо. Застосовуючи цей закон, науковці змогли глибше проникнути в суть складних процесів, що відбуваються в хімічних, біологічних та інших складніших системах. Він слугує найпліднішим інструментом для аналізу різних явищ у всіх галузях фізики. Ті задачі, у яких діють складні сили і розв’язування їх за законами Ньютона дуже складне, можна просто розв’язати, застосовуючи закони збереження, особливо закон збереження енергії.

6.1. Зіткнення

Тіла у природі взаємодіють між собою як під час безпосереднього контакту, так і на відстані. Бувають, проте, випадки, коли взаємодія короткочасна й особливо інтенсивна, у процесі якої сили настільки великі, що роллю інших постійних сил можна знехтувати. Це дає змогу розглядати взаємодійні тіла як замкнену систему і застосовувати до них закони збереження.

Взаємодію двох і більше тіл, яка відбувається у порівняно малій ділянці простору за короткий проміжок часу і з великою інтенсивністю, називають **зіткненням**.

Характер зіткнення залежить від багатьох причин, зокрема, від пружних властивостей тіл.

Розглянемо два крайні ідеальні випадки: абсолютно пружного й абсолютно непружного ударів.

Абсолютно пружним ударом називають таке зіткнення, у процесі якого не відбувається перетворення механічної енергії тіл, що стикаються, у внутрішню та інші види енергії. Це удар, у якому загальна кінетична енергія тіл до і після удару однакова.

Обмежимося розглядом центрального абсолютно пружного удару двох куль масами m_1 і m_2 , тобто удару, коли кулі рухаються вздовж прямої, що сполучає їхні центри, зі швидкостями v_1, v_2 . Знайдемо швидкості куль u_1 і u_2 після удару.

Нехай кулі рухаються по горизонтальній площині, тоді їхня потенціальна енергія у полі тяжіння Землі під час удару не змінюватиметься (рис. 6.1).



Рис. 6.1. Центральний удар двох куль

Застосуємо закони збереження. За законом збереження механічної енергії

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Запишемо закон збереження імпульсу:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2. \quad (6.1)$$

У центральному ударі вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ колінеарні, тому рівняння (6.1) перепишемо у скалярній формі:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Маємо систему двох рівнянь:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2,$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Можна довести, що розв'язками цих рівнянь будуть такі вирази:

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}; \quad (6.2)$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Треба мати на увазі, що швидкості v_1 і v_2 можуть мати різні знаки залежно від напрямів векторів $\mathbf{V}_1$ і $\mathbf{V}_2$.

Розглянемо випадок, коли маса кулі $m_2 \gg m_1$. Тоді

$$u_1 \approx 2v_2 - v_1, \quad u_2 \approx v_2.$$

Якщо, до того ж, друга куля до удару була нерухома ($v_2=0$), то

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0,$$

тобто перша куля відлітає від масивної нерухомої у протилежний бік з незмінною швидкістю $-v_1$.

Цікавий випадок, коли маси куль однакові. За такої умови з рівнянь (6.2) одержуємо

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Переконавшись для цього випадку є удар однакових пружних куль, підвішених на однаковій довжини нитках так, щоб вони дотикалися (рис. 6.2). Відхилимо на деякий кут одну кулю, відпустимо її, вона вдариться з іншою, яка була у стані спокою. Під час удару кулі поміняються ролями: та, що була рухома, зупиниться, а інша – відхилиться. Це означає, що кулі однакових мас у центральном пружному ударі обмінюються швидкостями.

Тепер розглянемо абсолютно непружний удар.

Абсолютно непружним називають удар, під час якого кінетична енергія тіл частково або повністю перетворюється у їхню внутрішню енергію; тіла після удару рухаються як одне ціле. Під час такого удару діє лише закон збереження імпульсу, закон збере-

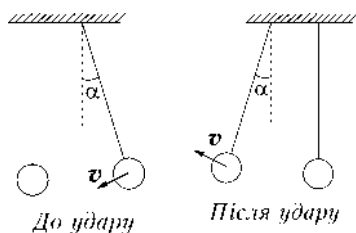


Рис. 6.2. Абсолютно пружний удар двох куль однакових мас

ження механічної енергії не виконується, бо частина або вся механічна енергія перетворюється у внутрішню енергію тіл і навколишнього середовища.

Прикладом абсолютно непружного удару може бути зіткнення пластилінових куль, захоплення електрона позитивним іоном, хімічна реакція, яка відбувається у процесі зіткнення атома A з молекулою BC тощо. Повний імпульс частинок до і після реакції однаковий, а різниця кінетичних енергій до і після зіткнення визначає сумарну зміну енергії хімічного зв'язку атомів у молекулах.

Якщо швидкості тіл до центрального удару були $\mathbf{v}_1$ і $\mathbf{v}_2$, маси m_1 і m_2 , то за законом збереження імпульсу

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u},$$

звідки

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Зміна механічної енергії під час непружного удару

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 \mathbf{v}_1^2}{2} - \frac{m_2 \mathbf{v}_2^2}{2},$$

або після перетворень:

$$\Delta W = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 < 0.$$

Отже, під час непружного удару повна механічна енергія системи зменшується, частина її перетворюється у немеханічну, внутрішню енергію тіл. У цьому і полягає дисипація (розсіяння) механічної енергії.

6.2. Потенціальна крива. Стан рівноваги тіла

Різновид руху або стан рівноваги тіла в полі потенціальних сил можна визначити без аналізу рівняння руху, тобто за допомогою застосування лише закону збереження механічної енергії в консервативній системі. Кінетична енергія тіла завжди додатна, а це означає, що потенціальна енергія не може перевищувати повної енергії тіла.

Припустимо, що тіло перебуває в потенціальному полі (однорівний випадок) і залежність його потенціальної енергії від координати, тобто форма кривої $\Pi(x)$, нам відома (рис. 6.3).

Уявимо, що тіло має повну механічну енергію E і в заданий момент часу міститься у точці з координатою x . Це означає, що тіло має потенціальну енергію $\Pi(x)$ і кінетичну $W=E-\Pi(x)$. Кінетичну енергію відображає на рис. 6.3 відстань від потенціальної кривої $\Pi(x)$ у точці x до прямої E , значення цієї величини завжди додатне. Якщо тіло рухається зліва направо, то на нього діє сила, що протидіє його рухові, бо на ділянці (x, x_2) нахил кривої $\Pi(x)$ додатний, а сила

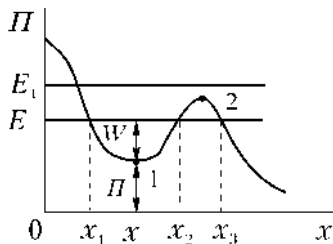


Рис. 6.3. Частинка може рухатися лише на ділянці, де її повна енергія дорівнює або більша від її потенціальної енергії

$$F_x = -\frac{\partial \Pi_x}{\partial x}$$

від'ємна. Тіло буде рухатися сповільнено і зупиниться у точці з координатою x_2 , тут його кінетична енергія $W=0$. Надалі воно почне рухатися у зворотному напрямі, спочатку прискорено, доки його швидкість не стане максимальною, а потім знову сповільнено, тобто буде коливатися на ділянці (x_1, x_2) і не зможе вийти за її межі. Можна сказати, що тіло перебуває в **потенціальній ямі**, створеній потенціальним полем. Ділянка між точками з координатами (x_2, x_3) недосяжна для тіла, її називають **потенціальним бар'єром**. Тіло зможе вийти з потенціальної ями лише тоді, коли його повна механічна енергія буде більшою від висоти потенціального бар'єра.

З аналізу поведінки тіла в полі потенціальних сил бачимо, що сила не діє на тіло лише у положеннях 1 і 2, тобто там, де функція $\Pi(x)$ має екстремальне значення, і

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0,$$

іншими словами, де потенціальна енергія тіла максимальна або мінімальна. Це положення рівноваги тіла. У положенні 1 рівновага тіла стійка, бо якщо тіло відхилити з цього положення, то на нього діятиме сила, яка повертатиме тіло в початкове положення. У стані стійкої рівноваги потенціальна енергія тіла мінімальна, $E' = \Pi_{\min}$. У положенні 2 маємо нестійку рівновагу, бо після виведення тіла з цього стану на нього діятиме сила, яка ще більше віддалятиме тіло від початкового стану. Існує ще стан байдужої рівноваги, коли сума всіх сил, що діють на тіло у кожному положенні, дорівнює нулю.

Отже, якщо тіло міститься на дні потенціальної ями, то перебуває у стані стійкої рівноваги. І взагалі, *мінімум повної енергії є умовою перебування системи в стані стійкої рівноваги.*

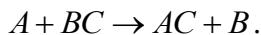
Поняття про потенціальну яму і потенціальний бар'єр широко застосовують у фізиці.

6.3. Закони збереження у найпростіших хімічних реакціях

6.3.1. Закон збереження імпульсу

Хімічні реакції можна трактувати як зіткнення, у яких відбувається перегруповування або обмін місцями атомів речовини. Тут зберігається повний імпульс системи, якщо виконується закон збереження маси.

Розглянемо взаємодію молекули BC з атомом A , унаслідок якої атом C з'єднується з атомом A , утворюючи молекулу AC (реакція заміщення):



Тоді закон збереження енергії

$$\frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{(m_B + m_C) v_{BC}^2}{2} = \frac{m_B u^2}{2} + \frac{(m_A + m_C) u_{AC}^2}{2} + \Delta U, \quad (6.3)$$

де ΔU – зміна енергії хімічних зв'язків у молекулах. Запишемо закон збереження енергії для цієї ж реакції, але в іншій інерціальній системі відліку, яка рухається зі швидкістю V відносно попередньої системи. Для цього у рівнянні закону збереження енергії замінимо v_A на $(v_A - V)$, v_B на $(v_B - V)$ і т.д. Отже, маємо

$$\frac{m_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{V})^2}{2} + \frac{(m_A + m_C)(\mathbf{v}_{BC} - \mathbf{V})^2}{2} =$$

$$= \frac{m_B(\mathbf{u}_B - \mathbf{V})^2}{2} + \frac{(m_A + m_C)(\mathbf{u}_{AC} - \mathbf{V})^2}{2} + \Delta U.$$

Проте рівняння, які описують одне й те ж явище у різних інерціальних системах відліку, повинні виглядати однаково. Щоб цього домогтися, треба, розкривши дужки у виразі (6.3), записати таку умову:

$$m_A \mathbf{v}_A + (m_B + m_C) \mathbf{v}_{BC} = m_B \mathbf{u}_B + (m_A + m_C) \mathbf{u}_{AC}.$$

А цей вираз є рівнянням закону збереження імпульсу у цій хімічній реакції.

6.3.2. Система координат центра мас

У повсякденній практиці ми послуговуємося **лабораторною системою координат** K^n , у якій спостерігач і лабораторне обладнання нерухомі, тобто скріплені зі стінами лабораторії. Обчислення фізичних величин, якими характеризують зіткнення частинок, є значно простішими, якщо застосовувати **систему координат центра мас**. У системі центра мас K^n початок координат розташовують у точці центра мас частинок, що взаємодіють, тобто система координат рухається зі швидкістю центра мас частинок. Цю швидкість у системі K^n визначає формула (2.5)

$$\mathbf{v}_{\text{цм}} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\sum m_i}.$$

Для замкненої системи $\sum \mathbf{p}_i = \text{const}$, тобто $\mathbf{v}_{\text{цм}} = \text{const}$. Отже, у системі K^n центр мас системи рухається за інерцією, а це означає, що система центра мас інерціальна.

Обчислення у системі K^n зручні тим, що тут сумарний імпульс частинок, що взаємодіють, дорівнює нулю. Тому у таких розрахунках застосовують лише закон збереження енергії. Оскільки після непружного удару частинки рухаються як одне ціле, то швидкість частинок у системі K^n і їхня кінетична енергія дорівнюють нулю. Це означає, що у процесі абсолютно непруж-

ного удару вся кінетична енергія, яку частинки мали до зіткнення, обчислена в системі K^u , після удару повністю перетворюється у їхню внутрішню енергію.

Застосування системи центра мас дає змогу чіткіше виявляти властивості процесів, що відбуваються всередині системи.

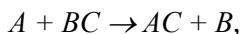
6.3.3. Реакційна здатність молекул

Закон збереження енергії всеосяжний, він охоплює і хімічні реакції, отже, виконується у загальному вигляді, якщо не діють зовнішні сили.

Проте загалом питання про кількість енергії, яка виділяється або поглинається у хімічних реакціях, складне, тут значний вплив може мати перехід речовин, які реагують, з одного агрегатного стану в інший, що пов'язане з додатковим виділенням або поглинанням енергії.

Особливістю хімічних реакцій є також те, що вони відбуваються не під час кожного зіткнення частинок. Щоб реакція відбулась, потрібне сприятливе для цього розташування молекул у момент їхнього зіткнення, а також достатня їхня активність, тобто достатній запас енергії (**реакційна здатність**). Відносна кількість результативних зіткнень залежить від природи реагентів, швидкостей молекул, а також від їхньої надлишкової внутрішньої енергії (збудженого стану).

Оцінімо реакційну здатність молекул. Розглянемо найпростішу хімічну реакцію заміщення типу



коли реагенти перебувають у газоподібному стані.

Виберемо систему координат центра мас K^u . Оскільки сумарний імпульс частинок, що взаємодіють, у такій системі відліку як до, так і після взаємодії, дорівнює нулю, то він нас не цікавить. Запишемо закон збереження енергії. Сума кінетичної і внутрішньої енергії частинок, що взаємодіють, як до, так і після реакції однакова:

$$W_A + U_A + W_{BC} + U_{BC} = W_B + U_B + W_{AC} + U_{AC},$$

де W – кінетична енергія; U – внутрішня енергія частинок.

Знайдемо зміну суми кінетичних енергій частинок у реакції або взятую з оберненим знаком зміну їхньої внутрішньої енергії:

$$U_A + U_{BC} - U_B - U_{AC} = W_{AC} + W_B - W_{BC} - W_A = Q.$$

Величину Q називають **енергією реакції**.

Якщо кінетична енергія продуктів реакції більша від кінетичної енергії молекул, які реагують, тобто $Q > 0$, то відбувається перетворення внутрішньої енергії у кінетичну (екзотермічна реакція), в іншому випадку, якщо $Q < 0$, частина кінетичної енергії витрачається на зміну внутрішньої енергії (реакція ендотермічна).

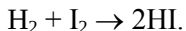
Отже, якщо $Q > 0$ (виділення теплоти), то така реакція можлива за будь-яких кінетичних енергій частинок, зокрема і тоді, коли $Q = 0$. Якщо ж $Q < 0$, то для початку реакції необхідна мінімальна кінетична енергія молекул; без цього мінімуму $W_{\min}$ реакція не почнеться. Цю мінімальну кінетичну енергію ($W_{\min} = |Q|$) називають **пороговою енергією реакції**. Отже, порогова енергія реакції – це та мінімальна кінетична енергія частинок, що реагують, за якої реакція ще може відбутися.

6.3.4. Енергія активації

Умова $Q > 0$ є необхідна, але не завжди достатня для хімічної реакції. Часто виникає потреба перевести молекули й атоми у хімічно активний стан (з підвищеною енергією), щоб вони мали здатність розпочати хімічну реакцію. Це пояснюють тим, що конкретний атом у молекулі перебуває ніби в потенціальній ямі і для реагування йому потрібна енергія на подолання потенціального бар'єра. Інакше кажучи, молекула може брати участь у реакції лише тоді, коли вона має надлишок енергії. До того ж, важливо, щоб ця надлишкова енергія була сконцентрована в молекулі саме на необхідних атомах або групі атомів.

Енергію, яка витрачається на переведення реагентів в активний стан, називають **енергією активації**. Вона повністю повертається до продуктів реакції, тому остаточна теплота реакції від енергії активації не залежить. Це видно з діаграми на рис. 6.4.

Розглянемо реакцію синтезу сполуки HI:



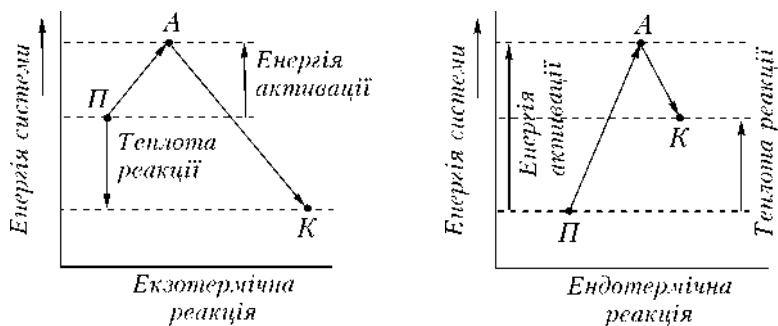


Рис. 6.4. Діаграма енергії системи в хімічній реакції за участю активатора

Вона відбувається за схемою, показаною на (рис. 6.5).

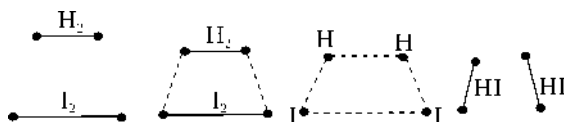


Рис. 6.5. Схема реакції $\text{H}_2 + \text{I}_2 \rightleftharpoons 2\text{HI}$

Як видно з рис. 6.5, процес синтезу HI відбувається через проміжне утворення “активного комплексу”, у якому вихідні зв’язки (H – H і I – I) вже послаблені, а кінцеві (H – I) ще не зовсім сформовані. Енергія активації тут дорівнює $1,6 \cdot 10^5$ Дж/моль.

Енергія активації потрібна для збудження перехідного стану (активного комплексу) речовини, що реагує. Та мінімальна кінетична енергія, яка зберігається і після реакції, проте участі в реакції не бере, а лише сприяє її перебігу, є енергією активації.

Контрольні запитання

1. Який удар називають абсолютно пружним?
2. У які види енергії може перетворитися механічна енергія під час абсолютно непружного удару?
3. Чому не будь-яке зіткнення молекул приводить до хімічної реакції?
4. За якої умови виконується закон збереження імпульсу у хімічних реакціях?

5. Що можна сказати про сумарний імпульс частинок у системі координат центра мас?
6. Що називають пороговою енергією хімічної реакції?
7. Що таке енергія активації?

Приклади розв'язування задач

6.1. Дві кульки масами $m_1=0,3$ кг і $m_2=0,2$ кг, підвішені на однакової довжини паралельних нитках, дотикаються між собою. Першу кульку відхилили так, що вона піднялась на висоту $h = 4$ см, і відпустили. На яку висоту піднімуться кульки після удару? Вважати удар пружним.

Розв'язування. За законом збереження механічної енергії шукаємо швидкість першої кульки:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 g h, \quad v_1 = \sqrt{2gh}, \quad v_2 = 0.$$

За формулою для абсолютно пружного удару знайдемо швидкості кульок після удару:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \quad \text{і} \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad \text{бо } v_2 = 0.$$

Далі

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2}; \quad m_2 g h_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

звідки

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = h \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2;$$

$$h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = h \left(\frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right).$$

Підставивши значення відповідних величин, отримаємо

$$h_1 = 0,04 \left(\frac{0,3 - 0,2}{0,5} \right)^2 \approx 0,002 \text{ м};$$

$$h_2 = 0,04 \left(\frac{4 \cdot 0,3}{0,5} \right)^2 = 0,23 \text{ м}.$$

6.2. Дві ідеально пружні кульки масами $m_1=0,2$ кг і $m_2=0,3$ кг рухаються назустріч одна одній зі швидкостями, відповідно, $v_1=7$ м/с і $v=4$ м/с. Під час зіткнення кульки деформуються. Визначте максимальну енергію деформації. Удар центральний.

Розв'язування. Під час зіткнення кульок частина кінетичної енергії перетворюється у потенціальну енергію деформації. Потім деформація зменшується, і накопичена потенціальна енергія знов переходить у кінетичну енергію кульок. Максимальна деформація та енергія деформації будуть тоді, коли обидві кульки деякий час рухатимуться як одне ціле з деякою швидкістю u так, ніби відбувся непружний удар. Ця максимальна потенціальна енергія деформації дорівнює зміні кінетичної енергії кульок:

$$\dot{I}_{\max} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Швидкість u знайдемо на підставі закону збереження імпульсу:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

звідки

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Підставимо вираз для швидкості u у формулу для потенціальної енергії деформації й після відповідних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{I}_{\max} &= \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{I}_{\max} &= \frac{0,5 \cdot 0,3 \cdot (7 + 4)^2}{2 \cdot 0,8} = 11,3 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Задачі

6.1. Тіло масою $m_1 = 2$ кг рухається зі швидкістю $v_1 = 3$ м/с і наздоганяє інше тіло масою $m_2 = 3$ кг, що рухається зі швидкістю $v_2 = 1$ м/с. Уважаючи удар центральним і пружним, визначте швидкості тіл після зіткнення.

Відповідь: 0,6 м/с, 2,6 м/с.

6.2. Тіло масою $m_1 = 2$ кг рухається назустріч іншому тілу масою $m_2 = 1,5$ кг і непружно стикається з ним. Швидкості тіл безпосередньо перед зіткненням, відповідно, $v_1 = 1$ м/с і $v_2 = 2$ м/с. Скільки часу будуть рухатися ці тіла після зіткнення, якщо коефіцієнт тертя $\kappa = 0,05$?

Відповідь: 0,58 с.

6.3. Тіло масою 4 кг рухається зі швидкістю 3 м/с і вдаряється в нерухоме тіло такої ж маси. Вважаючи удар центральним і непружним, визначте кількість теплоти, яка виділилась під час удару.

Відповідь: 9 Дж.

6.4. Для отримання повільних нейтронів швидкі нейтрони спрямовують у графіт, де вони, стикаючись з атомами вуглецю, втрачають частину кінетичної енергії. Вважаючи удар нейтрона з атомом вуглецю центральним і пружним, визначте, у скільки разів зменшиться кінетична енергія нейтрона (маса m_0) під час удару з нерухомим атомом вуглецю (маса $m=12 m_0$).

Відповідь: 1,4 раза.

Розділ 5 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	96
5.1. Закон збереження імпульсу.....	96
5.2. Закон збереження моменту імпульсу.....	98
5.3. Поняття про гіроскоп.....	100
5.4. Енергія, робота, потужність.....	101
5.5. Кінетична енергія поступального руху.....	102
5.6. Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.....	103
5.7. Консервативні сили.....	104
5.8. Потенціальна енергія	105
5.9. Потенціальна енергія у деяких випадках.....	106
5.9.1. Потенціальна енергія у полі тяжіння Землі	106
5.9.2. Потенціальна енергія тіла у гравітаційному полі...	107
5.9.3. Потенціальна енергія пружної деформації	109
5.10. Зв'язок між потенціальною енергією і консервативною силою	110
5.11. Закон збереження механічної енергії.....	111
Контрольні запитання.....	112
Приклади розв'язування задач.....	113
Задачі	115
РОЗДІЛ 6 ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ	117
6.1. Зіткнення.....	117
6.2. Потенціальна крива. Стан рівноваги тіла	120
6.3. Закони збереження у найпростіших хімічних реакціях	122
6.3.1. Закон збереження імпульсу	122
6.3.2. Система координат центра мас	123
6.3.3. Реакційна здатність молекул	124
6.3.4. Енергія активації	125
Контрольні запитання.....	126
Приклади розв'язування задач.....	127
Задачі	128

Розділ 7

МЕХАНІКА РІДИН

Рідини і гази мають багато подібних властивостей: велику рухливість частинок, відсутність опору у деформаціях зсуву; вони легко можуть змінювати свою форму; їм властива менша чи більша стисливість, а під час руху елементи їхніх мас змінюють своє взаємне розташування. Це ускладнює вивчення законів їхнього руху, тим паче, що у реальних рідинах і газах існує внутрішнє тертя. Отже, чимало механічних явищ у рідинах і газах відбуваються однаково. З огляду на це їх можна розглядати як суцільне неперервне середовище, яке будемо називати рідиною, й об'єднати вивчення законів їхнього руху та рівноваги у спільному розділі фізики – гідростатиці і гідродинаміці. Головне завдання механіки рідин полягає у тому, щоб визначити розподіл тисків і швидкостей всередині рідини.

7.1. Закони гідростатики

Якщо рідина перебуває в стані спокою, то тиск, який є всередині рідини, залежить лише від розташування заданої точки в рідині. *Під час стискання рідини зовнішній тиск передається в кожну її точку однаково (закон Паскаля).* На цьому законі ґрунтується дія різних гідравлічних машин.

З урахуванням ваги рідини отримуємо **закон Архімеда**: *на будь-яке занурене в рідину тіло діє виштовхувальна (піднімальна) вертикальна сила, що дорівнює вазі витісненої тілом рідини і прикладена до центра тяжіння об'єму рідини.* Цей закон доведено ще понад триста п'ятдесят років тому. Виділимо подумки у рідині якийсь її об'єм V . На нього діють сила тяжіння, прикладена до його центра тяжіння, і сили тиску з боку навколишньої рідини. Оскільки об'єм рідини V перебуває в стані спокою, то зрозуміло, що рівнодійна сил тиску дорівнює силі тяжіння,

прикладений до центра тяжіння об'єму V , і напрямлена у протилежний бік.

Якщо ж замінити виділений об'єм рідини будь-яким твердим тілом, то сила тяжіння зміниться, однак сила тиску (виштовхувальна сила) буде та сама і дорівнюватиме, як і раніше, вазі витісненого об'єму рідини.

На законі Архімеда ґрунтуються умови плавання тіл. Якщо вага тіла дорівнює вазі витісненої ним рідини, то тіло плаває.

Важливе значення має рівновага тіла, що плаває. Тут треба мати на увазі, що вага тіла завжди прикладена до центра тяжіння тіла, а сила Архімеда – до центра об'єму. В однорідному тілі, повністю зануреному в рідину, ці точки збігаються. Якщо ж тіло неоднорідне, то можливі різні види рівноваги. Положення рівноваги буде стійким, якщо під час невеликого нахилення тіла точка перетину напрямку дії сили Архімеда й осі плавання (метацентр) буде розташована вище від центра тяжіння тіла.

Трапляються проте, випадки, коли занурене в рідину тіло щільно прилягає до дна так, що вода не може проникнути під його нижню поверхню, тоді піднімальної сили не буде. Подібне явище може статися з підводним човном, який осів на глинясте дно. Човен ніби присосуюється до дна і вже не може сплисти.

7.2. Гідродинаміка. Течія рідини

Сукупність частинок рухомої рідини називають **поток**ом, а їхній рух – **течією**. Є два методи опису руху рідин: метод Лагранжа і метод Ейлера. **Метод Лагранжа** полягає у простежуванні за рухом кожної частинки рідини, тобто у визначенні положення і швидкості всіх частинок рідини у кожний момент часу. Простішим є **метод Ейлера**, у якому стежать не за частинкою рідини, а за окремими точками простору і визначають вектор швидкості, з якою минає цю точку кожна окрема частинка рідини; далі будують залежність значень вектора швидкості від координат і часу. Отримують поле вектора швидкостей, яке зображають за допомогою **ліній течії**, тобто ліній, дотична до яких у кожній точці збігається з напрямом швидкості течії. Уявлення про швидкість рідини дає густота ліній течії. Якщо у потоці рідини вибрати невелику площину і через усі точки її контуру провести лінії течії, то утвориться поверхня, яку називають **трубною**

течії; рідину, обмежену трубкою течії, називають **струменем**. Оскільки вектор швидкості дотичний до поверхні лінії течії, то частинки рідини трубки течії під час руху не виходять за межі трубки течії.

Течія рідини **стаціонарна**, якщо розміщення і форма трубки течії, а отже, значення швидкостей та інших величин, що характеризують течію у кожній її точці, не змінюються з часом.

Ламінарною називають таку течію, у якій шари рідини ковзають один щодо одного, не перемішуючись. Її легко спостерігати на струминах підфарбованої рідини. Стаціонарна течія може бути лише ламінарною. У такому разі траєкторії частинок не змінюються з часом і збігаються з лініями течії.

Турбулентною є така течія, яка супроводжується утворенням вихорів – ділянок із замкненими траєкторіями. Причиною утворення вихорів у рідинах є в'язкість. У турбулентній течії на утворення вихорів затрачається додаткова енергія, і проштовхування рідини по трубах потребує більших затрат енергії, ніж у течії ламінарній.

Характер течії в'язкої рідини визначає безрозмірне **число Рейнольдса** Re :

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta},$$

де ρ – густина рідини; v – середня за перерізом швидкість її течії; η – коефіцієнт в'язкості; d – величина, яка характеризує розміри тіла, з яким взаємодіє рідина (діаметр труби). Перехід від ламінарної до турбулентної течії відбувається за певної критичної швидкості, коли число Рейнольдса стає більшим від деякого критичного значення $Re_{кр}$. Якщо $Re < Re_{кр}$, то течія ламінарна. Для трубок круглого перерізу з гладкими стінками дослід дає

$$Re_{кр} \approx 2000.$$

Отже, залежно від властивостей рідини та умов її протікання, течія може бути ламінарною чи турбулентною.

Розрізняють течію ідеальної та реальної рідини. **Ідеальною** називають рідину, у якій немає внутрішнього тертя і яка є нестисливою. Вивчаючи рух ідеальної рідини, визначають закономірності, які можна застосувати до деяких реальних рідин з невеликою в'язкістю (вода, спирт).

7.3. Рівняння нерозривності

Розглянемо стаціонарний потік рідини і виділимо у ньому елементарну трубку течії, обмежену двома нормальними перерізами S_1 і S_2 , настільки тонку, щоб швидкості v_1 і v_2 у кожній точці відповідних перерізів були однакові (рис. 7.1).

За проміжок часу Δt через переріз S_1 пройде кількість рідини, що містилась в об'ємі $\Delta \tau = v_1 \Delta t S_1$, маса якої $\Delta m_1 = \rho_1 v_1 \Delta t S_1$. Відповідно, за той же проміжок часу Δt через переріз S_2 пройде маса рідини $\Delta m_2 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2$. Кількість рідини між перерізами S_1 і S_2 не змінилась, бо течія стаціонарна, а рідина нестислива, тому

$$\Delta m_1 = \Delta m_2,$$

тобто

$$\rho_1 v_1 \Delta t S_1 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2.$$

Скоротивши на Δt , отримаємо

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (7.1)$$

Крім того, у нестисливої рідини $\rho_1 = \rho_2$, а перерізи S_1 і S_2 вибрані довільно, тому отримуємо таку рівність:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{const}. \quad (7.2)$$

Тут vS – кількість рідини, що протікає через переріз S за 1 с.

Рівняння (7.2) називають **рівнянням нерозривності струменя**: кількість рідини, що протікає за 1 с через будь-який поперечний переріз трубки течії, однакова.

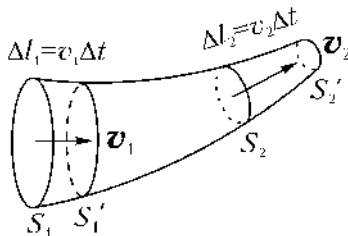


Рис. 7.1. Виведення рівняння нерозривності струменя

7.4. Рівняння Бернуллі

Розглянемо потік ідеальної рідини і виділимо у ньому елементарну струмину, обмежену трубкою течії. Згідно з рівнянням нерозривності (7.2) швидкість рідини у стаціонарній течії не може бути сталою уздовж трубки течії, якщо переріз трубки зміню-

ється. Це означає, що частинки рідини рухаються з прискоренням, а отже, зазнають дії сил.

Силами, що діють на частинки рідини, будуть сили тиску і тяжіння. Потік рідини вважатимемо стаціонарним. Подумки виділимо у трубі течії рідини елемент 1-2, обмежений перерізами S_1 та S_2 і позначимо через v_1 і v_2 швидкості частинок рідини в них, а через p_1 і p_2 – тиски, які діють на перерізи S_1 і S_2 ; h_1 і h_2 – висоти, на яких є перерізи S_1 і S_2 щодо деякого горизонтального рівня (рис. 7.2).

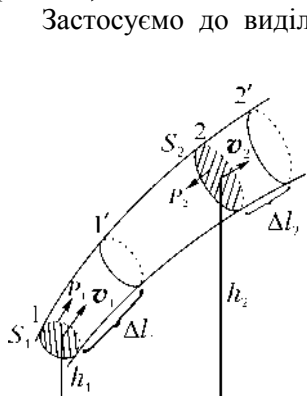


Рис. 7.2. Виведення рівняння Бернуллі

Застосуємо до виділеного елемента струменя закон збереження механічної енергії, за яким зміна енергії цього елемента внаслідок його переміщення повинна дорівнювати роботі зовнішніх сил, що діють на цей елемент і які спричинили його переміщення. За проміжок часу Δt елемент 1-2 переміститься по трубі і займе положення 1'– 2'. Переріз 1 зміститься на відстань $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$, а переріз 2 – на відстань $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$. Енергія частини елемента струменя між перерізами 1' і 2 не зміниться, бо рух рідини стаціонарний, і швид-

кості рідини в конкретних точках цього простору з плином часу не змінюються, хоча місце одних частинок рідини займуть інші. Зміна енергії елемента 1-2 визначена різницею енергій, які матиме частина рідини, що міститься між перерізами 2-2' і 1-1'.

Потенціальна енергія частини рідини, що міститься між перерізами 1-1',

$$\dot{I}_1 = \Delta m_1 g h_1 = \rho \Delta \tau_1 g h_1,$$

її об'єм

$$\Delta \tau_1 = S_1 v_1 \Delta t.$$

Кінетична енергія

$$W_1 = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \Delta \tau_1 v_1^2.$$

Відповідно, для елемента рідини 2-2' :

$$\ddot{I}_2 = \rho \Delta \tau_2 g h_2 ;$$

$$\Delta \tau_2 = S_2 v_2 \Delta t ;$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho \Delta \tau_2 v_2^2 .$$

Оскільки рідина нестислива, то $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_2 = \Delta \tau$. Зміна повної енергії елемента рідини 1-2

$$\begin{aligned} \Delta E &= (W_2 - W_1) + (\ddot{I}_2 - \ddot{I}_1) = \\ &= \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) \Delta \tau + \rho g (h_2 - h_1) \Delta \tau. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Визначимо тепер роботу, яку виконують зовнішні сили на переміщення елемента рідини за проміжок часу Δt . Роботу сил тяжіння ми вже врахували, бо зміна потенціальної енергії, яку ми обчислили, зумовлена цими силами. Зміна повної енергії елемента рідини 1-2 повинна дорівнювати роботі сил тиску. Сили тиску, які діють на перерізи 1 і 2, відповідно,

$$f_1 = p_1 S_1 \quad \text{і} \quad f_2 = p_2 S_2 ,$$

а їхнє переміщення

$$\Delta l_1 = v_1 \Delta t \quad \text{і} \quad \Delta l_2 = v_2 \Delta t .$$

Сила тиску f_2 напрямлена проти руху рідини, її робота від'ємна. Повна робота цих сил

$$\Delta A = f_1 \Delta l_1 - f_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t ,$$

або

$$\Delta A = (p_1 - p_2) \Delta \tau . \quad (7.4)$$

Прирівняємо вирази (7.3) і (7.4) й отримаємо після відповідних перегруповань таке рівняння:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 .$$

Оскільки перерізи 1 і 2 вибрані довільно, то для будь-яких перерізів струменя повинна виконуватись така умова:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} . \quad (7.5)$$

Цей вираз називають **рівнянням Бернуллі**. Величина $\rho v^2/2$ – це **динамічний** тиск (напір), або кінетична енергія одиниці об'єму рідини; ρgh – **гідралічний** тиск, який чисельно дорівнює питомій потенціальній енергії тяжіння; p – **статичний** тиск, який має значення питомої потенціальної енергії рідини, зумовленої силами тиску. Отже, у стаціонарному потоці ідеальної рідини повний тиск, який складається з динамічного, гідралічного і статичного, сталий у будь-якому поперечному перерізі струменя.

Рівняння Бернуллі є вираженням закону збереження механічної енергії у застосуванні до стаціонарного потоку ідеальної рідини.

Незважаючи на те, що його одержано для ідеальної рідини, з достатньою точністю воно справджується і для реальних рідин, у яких в'язкість мала, а також для газів, коли тиск уздовж труби змінюється мало.

7.5. Застосування рівняння Бернуллі

7.5.1. Горизонтальний потік

Для горизонтального потоку ($h_1 = h_2$) рівняння Бернуллі набуває такого вигляду:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 .$$

Звідси видно, що там, де швидкість потоку більша, статичний тиск p менший, і навпаки (рис. 7.3).

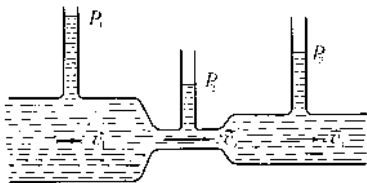


Рис. 7.3. У місцях звуження трубки швидкість рідини більша, тому там статичний тиск менший

Цю властивість горизонтального потоку використовують для побудови пульверизаторів, водоструминних насосів тощо, які можуть працювати і в режимі вертикального руху рідини.

Принцип дії **водоструминного насоса** (рис. 7.4) такий. Воду з водогону подають у трубку, яка внизу має звуження (сопло), звідки вода виходить з великою швидкістю. Тут статичний тиск знижений, і в цю ділянку з відкачуваного резервуара засмоктується повітря, яке струмінь води виносить назовні. Такі насоси прості в експлуатації і дають розрідження до 4–12 кПа.

Засмоктувальну дію швидкого струменя можна спостерігати у смерчах – швидких повітряних вихорах, які піднімають на значну висоту різні предмети, а також у вирах на швидких ріках. Кити використовують вихор води для збирання планктону: кит плаває навколо скупчення планктону, поступово звужуючи кола і заглиблюючись, доки в створений ним вир не втягнеться планктон, після цього кит поглинає його.

Таку засмоктувальну дію також застосовують у подачі палива в двигунах внутрішнього згорання.

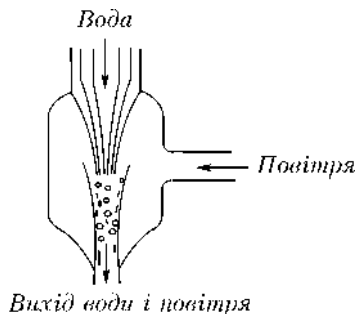


Рис. 7.4. Схема водоструминного насоса

7.5.2. Вимірювання швидкості потоку

Для визначення швидкості течії рідини застосовують прилад, який називають **трубкою Піто**.

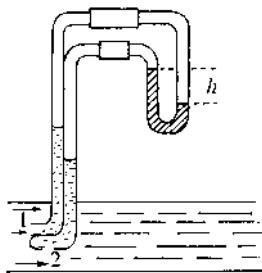


Рис. 7.5. Трубка Піто вимірює динамічний тиск

Прилад занурюють у рідину, швидкість потоку якої треба виміряти. Він має дві зігнуті манометричні трубки (диференційний манометр) з отворами, один з яких (1) напрямлений проти течії (рис. 7.5), а інший (2) – паралельно до неї. Відомо, що статичний тиск – це тиск у незбуреному потоці, що діє на поверхню тіла, яке обтікає рідина.

Отже, трубка 2 вимірює статичний тиск, а трубка 1 – повний. Справді, в отворі першої трубки швидкість рідини дорівнює нулю, а в отворі другої вона незмінна.

Запишемо рівняння Бернуллі для двох точок 1 і 2, які мають спільну трубку течії (горизонтальний потік):

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 .$$

Для нашого випадку на вході у трубку 1 швидкість рідини $v_1 = 0$, а на вході у трубку 2 – $v_2 = v$, тому

$$p_1 = \frac{\rho v^2}{2} + p_2 ;$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v^2}{2} .$$

За різницею тисків, виміряних манометром, для швидкості руху рідини отримуємо формулу

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} .$$

Трубку Піто застосовують для вимірювання швидкості кораблів і літаків.

7.6. Застосування закону збереження імпульсу до руху рідини

Відомо, що пожежники мусять міцно тримати в руках довгий зігнутий шланг від пожежної машини, бо коли в нього пускають воду, то його смикає і кидає у різні боки. Це результат дії сили реакції води на стінку шланга.

Розрахунок сил, які діють на стінки труби чи тіла у потоці рідини – завдання в гідродинаміці досить складне. Воно значно спрощується, якщо застосувати до всього потоку закон збереження імпульсу. Це дає змогу безпосередньо визначити рівнодійну всіх сил, які діють на стінку труби в потоці ідеальної рідини.

Нехай рідина густиною ρ протікає по зігнутій трубі змінного перерізу (рис. 7.6). Згин труби призводить до зміни напрямку

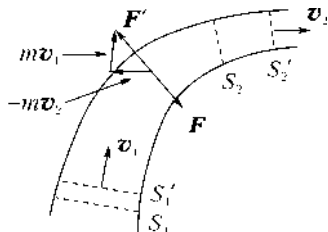
швидкості рідини. За другим законом Ньютона повна зміна імпульсу рідини за 1 с дорівнює рівнодійній усіх сил $\mathbf{F}$, що діють на рідину:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} = -\mathbf{F}',$$

де $\mathbf{F}'$ – сила тиску рідини на стінку труби; m – маса рідини, що протікає за 1 с через поперечний переріз трубки. Зміна імпульсу рідини за 1 с – це зміна імпульсу рідини в об'ємах S_2S_2' і S_1S_1' . Ця зміна дорівнює різниці

$$\mathbf{v}_2\rho S_2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\rho S_1\mathbf{v}_1.$$

Рис. 7.6. Унаслідок згину труби виникає сила реакції потоку рідини на трубу



Застосуємо рівняння нерозривності $S_1v_1 = S_2v_2$ й отримаємо

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \rho S_1 v_1 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

і
$$\mathbf{F}' = \rho S_1 v_1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Отже, на зігнуту трубу з боку рідини діє сила, напрямлена протилежно до згину труби. Дію таких сил використовують у водяних та газових турбінах, в авіації (турбогвинтові та турбореактивні літаки).

7.7. Течія в'язкої рідини по трубі

7.7.1. В'язкість рідин

Досвід засвідчує, що в реальній рідині, яка тече по горизонтальній трубі сталого перерізу, статичний тиск не є однаковим, а зменшується вздовж труби по ходу течії (рис. 7.7).

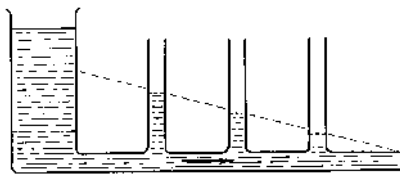


Рис. 7.7. Зниження статичного тиску в рідині, що рухається в трубі, зумовлене силою внутрішнього тертя

Рівні рідини в манометричних трубках лежать на прямій, а це означає, що зниження тиску в трубці прямо пропорційне до шляху, пройденого в ній рідиною.

Причиною зниження тиску є **внутрішнє тертя** між шарами рідини, що гальмує її рух і супроводжується переходом частини механічної енергії у внутрішню. Якщо течія рідини у трубі ламінарна, то швидкість найбільша у центрі труби і поступово зменшується до нуля на стінках (рис. 7.8). Між суміжними шарами рідини діють тангенціальні сили внутрішнього тертя, модуль яких залежить від градієнта швидкості шарів рідини dv/dz

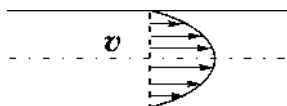


Рис. 7.8. У ламінарній течії швидкість рідини по радіусу круглої труби розподілена за параболічним законом

і визначений **формулою Ньютона**

$$F = \eta \frac{dv}{dz} S ,$$

де η – коефіцієнт динамічної в'язкості. Коефіцієнт динамічної в'язкості чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка діє між двома паралельними шарами рідини площею 1 м^2 , якщо градієнт швидкості дорівнює одиниці. Одиницею коефіцієнта в'язкості є Паскаль-секунда ($\text{кг/с} \cdot \text{м} = \text{Па} \cdot \text{с}$). Існує ще коефіцієнт кінематичної в'язкості, який визначають як відношення коефіцієнта динамічної в'язкості до густини рідини.

Коефіцієнт в'язкості залежить від температури – з підвищенням температури в'язкість рідини зменшується (в'язкість газів збільшується).

В'язкість деяких рідин (емульсій, суспензій, розчинів полімерів) залежить від режиму їхньої течії – тиску, градієнта швидкості

ті. Це пояснюють тим, що структурні елементи такої рідини (білкові молекули, дисперсні частинки) розміщуються у потоці по-різному за різних швидкостей. Такі рідини називають **неньюто-нівськими**. Кров (суспензія клітин крові у білковому розчині-плазмі) також належить до неньютонівських рідин.

7.7.2. Формула Пуазейля

Формула Пуазейля дає змогу визначити об'єм реальної рідини, що протікає за 1 с через поперечний переріз труби залежно від її радіуса, довжини, перепаду тисків на кінцях труби і коефіцієнта в'язкості рідини.

Виведемо цю формулу. Вважатимемо, що течія рідини ламінарна, отже, швидкість її шарів у кожній точці стала. Між стінкою труби і прилеглими шарами рідини діють сили зчеплення, тому молекули цього суміжного із стінкою рідини шару можна вважати нерухомими. Зі збільшенням відстані від стінки швидкість шарів рідини зростає. Внутрішнє тертя між шарами рухомої рідини приводить до того, що по центру труби швидкість течії найбільша.

Спочатку знайдемо закон, за яким змінюється швидкість рідини у напрямі від центра до стінки труби. Подумки всередині труби виділимо циліндр радіусом r , довжиною l (рис. 7.9). Оскільки рідина рухається без прискорення, то сума сил, що діють на неї, дорівнює нулю, тобто сила тиску дорівнює силі внутрішнього тертя:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l,$$

де πr^2 – площа основи циліндра; η – коефіцієнт внутрішнього тертя (в'язкості); dv/dr – градієнт швидкості; $2\pi r$ – довжина кола основи циліндра; $2\pi r l$ – площа бічної стінки; $p_1 - p_2$ – перепад тиску на кінцях циліндра. Розділимо змінні й отримаємо таке рівняння:

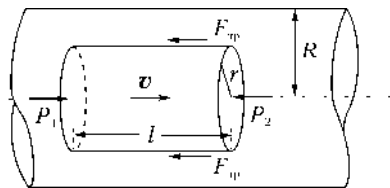


Рис. 7.9. Виведення формули Пуазейля

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \quad (7.6)$$

Знак мінус означає, що швидкість рідини у напрямі від осі до стінки труби зменшується. Проінтегруймо рівняння (7.6):

$$v = \int dv = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \quad (7.7)$$

Сталу інтегрування знайдемо з граничних умов: на стінці труби ($r = R$) $v = 0$, звідси випливає, що

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Підставимо це значення у формулу (7.7):

$$v_{(r)} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (7.8)$$

На осі трубки, де $r = 0$, швидкість

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (7.9)$$

Як бачимо, за ламінарної течії швидкість рідини у напрямі від центра до стінки труби зменшується за параболічним законом.

Тепер визначимо об'єм рідини, яка протікає через поперечний переріз труби за 1 с. Для цього розіб'ємо поперечний переріз труби на циліндричні кільця завширшки dr (рис. 7.10). Об'єм рідини, що протікає через кільцеву щілину шириною dr і радіусом r за 1 с,

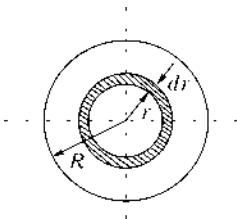


Рис. 7.10. Уявний поперечний переріз приладу

$$dQ = v \Delta S = v 2\pi r dr.$$

Підставимо сюди вираз для v з (7.8) і (7.9):

$$dQ = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r dr.$$

Проінтегруємо цей вираз за r у межах від нуля до R :

$$Q = \int_0^R v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r dr = v_0 2\pi \frac{R^2}{2} - v_0 2\pi \frac{R^4}{4R^2} = \frac{1}{2} \pi R^2 v_0.$$

З огляду на (7.9) для Q матимемо такий вираз:

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} \pi R^4.$$

Це **формула Пуазейля**. Вона відображає те, що у ламінарній течії кількість рідини, яка протікає через поперечний переріз труби за 1 с, прямо пропорційна до радіуса труби у четвертому степені. Якщо радіус труби зменшити удвічі, то кількість рідини, що протікатиме через її поперечний переріз, зменшиться у 16 разів.

Формулу Пуазейля часто застосовують для вимірювання коефіцієнта в'язкості рідини η шляхом визначення її об'єму, що витікає з циліндричної трубки відомого діаметра за відповідний час (віскозиметр Оствальда).

Для турбулентної течії формулу Пуазейля застосовувати не можна, бо тут залежність швидкості і витрата рідини залежать від геометричних розмірів труби по-іншому.

7.8. Рух тіл у рідині та газі

На будь-яке тіло, що рухається в нерухомій рідині чи газі, завжди діє сила, яка протидіє його рухові. Визначення цієї сили у загальному випадку – складна проблема з огляду на значні математичні труднощі. З іншого боку, вона набула особливо важливого значення внаслідок бурхливого розвитку авіації та морської навігації.

Замість того, щоб говорити про рух тіла в рідині, простіше розглядати еквівалентну задачу про обтікання нерухомого тіла потоком рідини: отримані результати будуть справджуватися і для руху тіла відносно нерухомого середовища.

Силу дії потоку на тверде тіло завжди можна розкласти на дві перпендикулярні складові: одна напрямлена вздовж потоку (це сила *лобового опору*), інша перпендикулярна до нього (*піднімальна сила*). Для симетричних тіл, розташованих так, що вісь симетрії розміщена вздовж потоку, існує лише сила лобового опору.

Розглянемо поведінку кулі в потоці реальної рідини з урахуванням її в'язкості (рис.7.11). На поверхні контакту рідини з кулею молекули рідини ніби прилипають до кулі, їх можна вважати нерухомими. У тонкому суміжному приповерхневому, шарі швидкість рідини стрімко збільшується від нуля на поверхні кулі до значення, що відповідає швидкості незбуреного кулею потоку. Тут маємо великий градієнт швидкості, у цьому суміжному шарі діють сили внутрішнього тертя, які спричиняють утворення сил опору.



Рис. 7.11. Обтікання кулі реальною рідиною

Роль в'язкості цим не обмежується. Зі збільшенням швидкості рідини внаслідок існування суміжного шару змінюється характер обтікання кулі рідиною. Тангенціальні сили внутрішнього тертя, які діють у суміжному шарі, спричиняють обертальний рух частинок рідини, тут відбувається відривання потоку від поверхні кулі з утворенням вихорів – ділянки зі зниженим тиском. Унаслідок відривання потоку в'язкої рідини

від поверхні кулі сили тиску на кулю перерозподіляються; цей тиск збільшує підсумкову силу опору рухові рідини. Крім того, сили опору виконують додаткову роботу утворення вихорів.

Отже, можна виділити дві причини утворення лобового опору тіла у в'язкій рідині: а) дотичні сили в'язкості (опір внутрішнього тертя); б) перепад тиску, зумовлений відриванням потоку від тіла (опір тиску). За малих швидкостей суттєву роль відіграють лише сили тертя. Опір тиску за таких умов невеликий.

У загальному випадку опір тиску залежить і від форми тіла. Тіла з добре обтічною формою мають найменший опір тиску. Це видовжені тіла з заокругленням спереду і плавним загостренням у кінці.

Співвідношення між опором тертя й опором тиску визначене числом Рейнольдса. За малих Re головну роль відіграє опір тертя, а за великих – сила тиску. Це зумовлено утворенням турбулентної течії за тілом.

Для невеликих тіл сферичної форми, які рухаються у в'язкому середовищі, сила внутрішнього тертя за малих сталих швидкостей руху визначена **формулою Стокса**

$$F = 6\pi r\eta v,$$

де r – радіус кульки; v – швидкість її руху.

Ця формула справджується за умови, що відстань від кульки до межі рідини (до стінки посудини) набагато більша від діаметра кульки.

На законі Стокса ґрунтується метод визначення швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ), що дає змогу медикам виявити запальні процеси в організмі людини. Еритроцити мають дископодібну форму й осідають у в'язкій рідині – суміші крові з лимоннокислим натрієм відповідно до закону Стокса.

7.9. Піднімальна сила крила

На крило літака, який летить у повітрі, діє велика піднімальна сила, що утримує його на заданій висоті. Її утворення пояснюють асиметрією крила, зокрема існуванням гострого заднього ребра, а також утворенням вихору за крилом під час його руху. Такий вихор (вихор A , рис. 7.12) завжди має деякий момент імпульсу.

За законом збереження повний момент імпульсу системи крило-повітря повинен дорівнювати нулю як на початку, так і під час руху крила. Це буде за умови, якщо припустити, що під час руху крила одночасно з вихором A , який утворюється за крилом, виникає ще один повітряний вихор B навколо крила, момент імпульсу якого напрямлений у протилежний бік стосовно моменту імпульсу вихора A . У результаті додавання швидкостей потоку повітря, який налітає на крило, і вихору B швидкість повітря над крилом стає більшою, ніж під крилом, а згідно з рівнянням Бернуллі (7.5) там, де швидкість повітря менша, тиск більший. Отже, під крилом тиск повітря більший, ніж над ним.

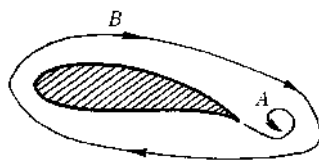


Рис. 7.12. Під час руху крила біля нього утворюються два вихори

Різниця цих тисків утворює піднімальну силу крила, напрямлену вертикально вгору. Кут нахилу крила до горизонту має суттєве значення у створенні максимальної піднімальної сили крила. Поява за крилом вихорів зумовлює існування і лобового опору крила. Без лобового опору не може бути й піднімальної сили, їхні причини (вихорі) тісно пов'язані між собою.

7.10. Уявлення про теорію механічної подібності

Картина явищ, які відбуваються під час обтікання тіл в'язкою рідиною, досить складна, у багатьох випадках теоретично визначити силу опору дуже складно, а то й не можливо. Тому на практиці застосовують експериментальні методи, які ґрунтуються на дослідженнях обтікання в'язкою рідиною зменшених моделей різних механічних споруд (літаків, ракет, кораблів тощо). Для цього необхідно, щоб, крім геометричної подібності між моделлю і натурою, була ще й механічна подібність. Це означає, що однаковими повинні бути і співвідношення сил різної фізичної природи для кожної ділянки потоку як для моделі, так і для натурі, інакше кажучи, обидва потоки повинні бути фізично еквівалентні. Виявляється, що ця умова буде виконана, якщо, крім геометричної подібності потоків, матимемо ще рівність чисел Рейнольдса для обох потоків. Отже, число Рейнольдса стає критерієм не лише у визначенні характеру течії рідини в трубі, а й сил, які діють на тіло в потоці рідини.

Наприклад, розглянемо картину обтікання літака повітряними потоками під час його польоту. Нехай крейсерська швидкість літака $u = 350$ км/год. Змодельюємо його рух за допомогою моделі, зменшеної в 1/2,5 раза. В обох випадках густина повітря ρ і коефіцієнт в'язкості η для повітря однакові, розміри літака – L , моделі – l . З рівності чисел Рейнольдса

$$Re_{\text{літак}} = Re_{\text{модель}}$$

отримуємо

$$\frac{\rho L u}{\eta} = \frac{\rho l v}{\eta},$$

звідки для швидкості моделі

$$v = \frac{Lu}{\eta} = 2,5 \cdot 350 = 875 \text{ км/год},$$

тобто швидкість потоку повітря в аеродинамічній трубі повинна бути в стільки разів більша від швидкості літака, у скільки разів розміри літака більші від розмірів моделі. За таких великих швидкостей повітря в аеродинамічній трубі вже не можна вважати нестисливим. Це означає, що модель треба робити більшою, бо сучасні типи літаків мають швидкості, близькі до швидкості звуку або й перевершують її. Моделі таких літаків досліджують у закритих аеродинамічних трубах з підвищеним тиском. Це дуже великі споруди.

7.11. Аеродинаміка надзвукових швидкостей

Якщо швидкість тіла в середовищі v перевищує швидкість звуку $v_{зв}$ у цьому середовищі, то породжене тілом збурення вздовж його траєкторії залишається поза тілом і, поширюючись від місця свого виникнення зі швидкістю звуку, утворює хвилю, фронт якої має форму конічної поверхні з вершиною у точці, де перебуває тіло. Кут при вершині конуса залежить від співвідношення v і $v_{зв}$. Прикладом такої хвилі є носова хвиля, яка поширюється по поверхні води від носа човна під час його руху зі швидкістю, що перевершує швидкість хвилі на поверхні води.

Характер дії сил опору середовища на рухоме тіло визначений числом Маха

$$M = v/v_{зв}.$$

Розглянемо це детальніше:

1. $M < 1$. Збурення середовища (звук) поширюється швидше від рухомого тіла і впливає на середовище, яке є перед ним. Можна вважати, що коли $v < v_{зв}$, то вплив рухомого тіла на середовище поширюється ніби моментально, до того ж, саме середовище можна вважати нестисливим. За таких умов перевагу треба надавати тілам заокругленої форми їхньої лобової частини;

2. $M > 1$. Тіло рухається зі швидкістю, більшою від швидкості звуку. Картина звукових поверхонь зображена на рис.7.13.

Хвильовий фронт (обвідна хвильова поверхня) має форму конуса (конус Маха). Безпосередньо перед тілом виникає ділянка

підвищеної густини повітря (ударна хвиля), яка рухається разом з тілом і завдяки енергії рухомого тіла.

Збурення (пружна хвиля) впливає на середовище лише в межах конуса Маха. Коли, наприклад, ми бачимо, що літак з надзвуковою швидкістю пролітає над нами, то спочатку біля нас

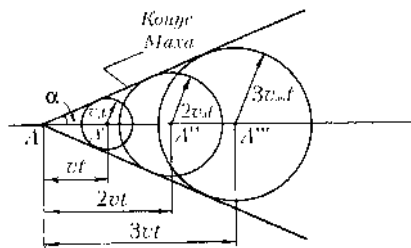


Рис 7.13. Тіло рухається зі швидкістю більшою від швидкості звуку, збурення впливає на середовище лише в межах конуса Маха

проходить межа конуса Маха –ділянка підвищеної густини повітря у вигляді ударної хвилі, що супроводжується бабаханням, а після цього чуємо звичайне гудіння двигунів літака.

Щоб послабити утворення ділянки підвищеної густини (ударної хвилі) в процесі польоту, надзвуковим літкам надають стрілоподібної форми,

загострюючи передню частину їхніх крил. Форма задньої частини тіла не має вже такого важливого значення, як під час невеликої швидкості обтікання.

Контрольні запитання

1. У чому полягає різниця між методом опису руху рідин Лагранжа й Ейлера?
2. Яку течію рідини називають ламінарною?
3. Коли ламінарна течія переходить у турбулентну?
4. За яких умов до течії рідини можна застосовувати рівняння Бернуллі?
5. Які є приклади застосування рівняння Бернуллі?
6. Від чого залежить кількість рідини, що витікає за 1 с з горизонтальної труби?
7. Які сили діють на рухоме тіло в потоці рідини?
8. Яка роль числа Рейнольдса у характеристиці руху рідини?
9. Що таке конус Маха?

Приклади розв'язування задач

7.1. У стінці циліндричної посудини, заповненої водою, є малий отвір, розміщений на глибині $h=30$ см нижче рівня води. Нехтуючи в'язкість води, знайдіть швидкість витікання води з отвору.

Розв'язування. Застосуємо рівняння Бернуллі до перерізів струменя води на рівні вільної поверхні рідини і на виході з отвору:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Тут v_1 – швидкість опускання рівня води у посудині; v_2 – швидкість витікання води з отвору. Тиски $p_1 = p_2$, бо вони дорівнюють атмосферному тиску. Відлік висоти зробимо з рівня отвору, тоді $h_2=0$, $h_1 = h$ і рівняння Бернуллі матиме такий вигляд:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh = \frac{v_2^2}{2}.$$

Із рівняння нерозривності струменя

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1},$$

де S_1 і S_2 – площі поперечних перерізів струменя, тобто посудини й отвору. За умовою задачі $S_2 \ll S_1$, тому $v_1 \ll v_2$. Отже, доданком $v_1^2/2$ можна знехтувати. Для швидкості витікання води з отвору отримуємо відому формулу Торрічеллі:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,3} = 2,43 \text{ м/с}.$$

7.2. Циліндрична посудина радіусом $R=10$ см і висотою $h=1$ м повністю заповнена водою. У дні посудини є отвір радіусом $r = 0,5$ см. Через який час вода витече з посудини? В'язкість води знехтувати.

Розв'язування. За умовою задачі площа отвору S значно менша від площі поперечного перерізу посудини S_1 , тому для визначення швидкості витікання води застосуємо формулу Торрічеллі $v = \sqrt{2gh}$. Як бачимо, швидкість v залежить від висоти стовпа рідини h . Тому і швидкість опускання води в посудині v_1 залежатиме від h . Якщо положення рівня води позначити змінною величиною у то швидкість опускання рівня води у посудині

$$v_1 = -\frac{dy}{dt}.$$

Знак мінус означає, що під час витікання води її рівень знижується (у зменшується). З іншого боку, з рівняння нерозривності для швидкості опускання рівня води v_1 можемо записати:

$$v_1 = \frac{vS}{S_1}.$$

Підставимо в останній вираз значення швидкості v з формули Торрічеллі:

$$v = -\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2gy}}{S_1} S.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{\sqrt{2g}}{S_1} S dt.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{\sqrt{2g}}{S_1} S \int_0^T dt.$$

У результаті отримаємо

$$2\sqrt{h} = \frac{\sqrt{2g}}{S_1} ST,$$

звідки

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot \frac{S}{S_1} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{9,81}} \cdot \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{3,14 \cdot 0,005^2} = 180 \text{ с.}$$

Задачі

7.1. На поршень шприца діє сила $F = 8$ Н. Скільки часу витікатиме зі шприца вода, якщо площа поршня $S_1 = 2$ см, площа поперечного перерізу голки $S_2 = 1$ мм, а хід поршня $l = 5$ см?

Відповідь: 1,12 с.

7.2. Визначте швидкість течії води в широкій частині горизонтально розташованої трубки різних перерізів, якщо радіус вузької частини утричі менший від радіуса широкої, а різниця тисків у широкій і вузькій частинах $\Delta p = 10$ кПа.

Відповідь: 0,5 м/с.

7.3. У посудину летється вода так, що за 1 с наливається 0,2 л води. Яким повинен бути діаметр отвору у дні посудини, щоб вода в ній була на сталому рівні $h = 8,3$ см?

Відповідь: 1,4 см.

7.4. Швидкість опадання крапель туману $v = 2$ м /с. Який діаметр крапель? В'язкість повітря $\eta = 1,84 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Відповідь: $1,30 \cdot 10^{-4}$ м.

7.5. По трубі діаметром 20 см, зігнутій під кутом 120° , тече вода. Її витрати дорівнюють 100 л /с. Чому дорівнює рівнодійна всіх сил тиску на стінку труби?

Відповідь: 318,8 Н.

Розділ 7 МЕХАНІКА РІДИН	130
7.1. Закони гідростатики	130
7.2. Гідродинаміка. Течія рідини	131
7.3. Рівняння нерозривності	133
7.4. Рівняння Бернуллі.....	133
7.5. Застосування рівняння Бернуллі	136
7.5.1. Горизонтальний потік	136
7.5.2. Вимірювання швидкості потоку.....	137
7.6. Застосування закону збереження імпульсу до руху рідини.....	138
7.7. Течія в'язкої рідини по трубі.....	139
7.7.1. В'язкість рідин	139
7.7.2. Формула Пуазейля.....	141
7.8. Рух тіл у рідині та газі.....	143
7.9. Піднімальна сила крила.....	145
7.10. Уявлення про теорію механічної подібності	146
7.11. Аеродинаміка надзвукових швидкостей.....	147
Контрольні запитання	148
Приклади розв'язування задач.....	149
Задачі.....	150

Розділ 8

КОЛИВАННЯ

Одним з найпоширеніших видів рухів у природі й техніці є коливний рух. Він властивий багатьом процесам, що відбуваються і в живій природі: повторюваність, ритм є формою існування всього живого. У будь-якому організмі органи, тканини, клітини працюють ритмічно.

Хоча природа коливань різна, проте описують їх одні рівняння, однакова залежність характерних параметрів від часу. Якщо значення фізичних величин, які характеризують коливання, повторюються через однакові проміжки часу, то таке коливання називають періодичним, а проміжок часу – періодом. Отже, **період коливання** – це проміжок часу, впродовж якого відбувається одне повне коливання. Найбільше відхилення системи від положення рівноваги називають **амплітудою** коливання.

Умова існування коливання – дія сили, спрямованої в бік положення рівноваги системи. У механіці такою силою є пружна сила. Протидіють коливанню сили тертя й опору.

Найпростішим періодичним коливанням є коливання гармонічне. Це такий коливальний рух, який описує гармонічна функція синуса або косинуса. Обмежимося розглядом лише гармонічних коливань.

8.1. Кінематика коливань

Регулярне повторення характерне як для коливального руху, так і для руху тіл по колу. Це процеси, які повторюються з часом.

Знайдемо зв'язок між рухом матеріальної точки M по колу та її коливальним рухом. Положення точки будемо характеризувати радіусом-вектором $\mathbf{R}$ (рис. 8.1) і кутом φ між радіусом-вектором і фіксованою прямою Ox .

Припустимо, що точка обертається рівномірно, тоді її кутова швидкість $\omega = \varphi t$. Спроекуємо точку на пряму Ox , яка лежить у площині руху точки. Оскільки точка рухається по колу, то проекція точки на пряму Ox переміщуватиметься то в один, то в інший бік, тобто виконуватиме коливання. Проекція радіуса-вектора точки R на пряму Ox , а отже, зміщення проекції точки

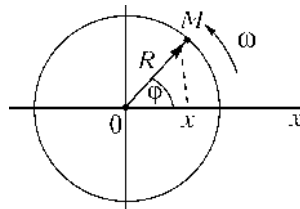
$$x = R \cos \varphi = R \cos \omega t. \quad (8.1)$$

Максимальне значення проекції зміщення (амплітуда коливання) $A = R$, тому формулу (8.1) перепишемо так:

$$x = A \cos \omega t. \quad (8.2)$$

Формула (8.2) означає, що проекція точки, яка рухається по колу на пряму Ox , є **гармонічним** коливанням.

Рис. 8.1. Якщо точка M рухається по колу, то її проекція на пряму Ox виконує гармонічні коливання



У загальному випадку **рівняння гармонічного коливання** таке:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.3)$$

Вираз $(\omega t + \varphi)$ називають **фазою** коливання, вона характеризує стан коливального процесу і дає змогу визначити положення точки у коливальному русі в будь-який момент часу; тут φ – початкова фаза, тобто фаза коливання на час, коли $t = 0$.

Період коливань визначимо за такими міркуваннями. Період T – це проміжок часу, після проходження якого повторюються значення всіх фізичних величин, що характеризують коливання. Тому

$$A \cos \omega t = A \cos \omega(t + T).$$

З іншого боку, косинус є періодична функція з періодом 2π , тобто за один період фаза коливання отримує приріст 2π :

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi,$$

звідки

$$\omega T = 2\pi;$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величину ω , яка є в рівнянні гармонічного коливального руху, називають циклічною частотою, її виражають у радіанах за секунду (рад/с). Описуючи гармонічне коливання, послуговуються ще такою величиною, як лінійна частота ν , яка дорівнює кількості повних коливань точки за одиницю часу і яка пов'язана з періодом коливання T так:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Отже,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Зазначимо, що частота гармонічного коливання не залежить від амплітуди. Одиницею частоти є герц (Гц). Один герц – це частота такого коливального руху, коли за 1 с відбувається одне повне коливання.

8.2. Швидкість і прискорення у коливальному русі. Рівняння гармонічного осцилятора

Систему, яка може виконувати гармонічні коливання біля положення рівноваги, називають гармонічним осцилятором. Такий осцилятор є моделлю періодичного коливального руху в багатьох задачах класичної і квантової фізики. Це, наприклад, може бути математичний маятник або маса на пружині, коли їхні коливання відбуваються з малою амплітудою, електричний коливальний контур тощо.

Припустимо, що маємо гармонічний осцилятор у вигляді матеріальної точки, яка виконує гармонічне коливання

$$x = A \cos \omega t ,$$

де x – зміщення точки; A – амплітуда. Знайдемо швидкість коливального руху точки. Для цього візьмемо похідну за часом від виразу (8.2) для зміщення точки:

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin \omega t = A\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Як бачимо, швидкість точки у коливальному русі також змінюється за гармонічним законом. Коливання швидкості **випереджають** коливання зміщення точки на $\pi/2$, а максимальне значення (амплітуда) швидкості

$$v_{\max} = A\omega.$$

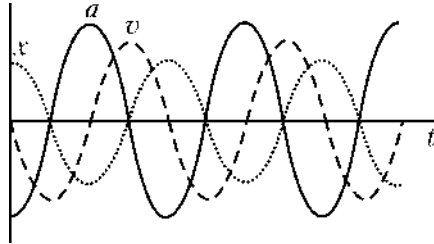
Вона чисельно дорівнює тій швидкості, яку має точка, коли проходить положення рівноваги, тобто коли

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Узявши другу похідну від (8.2), отримаємо вираз для прискорення:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t = A\omega^2 (\omega t + \pi). \quad (8.4)$$

Рис. 8.2. Залежність від часу зміщення x , швидкості v і прискорення a точки у коливальному русі



Коливання прискорення точки відбуваються у **протифазі** з коливанням зміщення (рис. 8.2). Зіставимо вирази (8.1) і (8.4) й отримаємо рівняння

$$a = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x. \quad (8.4a)$$

Помножимо прискорення a на масу частинки m :

$$F = ma = -m\omega^2 x.$$

Як бачимо, частинка виконує гармонічні коливання під дією сили, пропорційної до зміщення і напрямленої у протилежний до зміщення бік. Такою силою є пружна сила.

Формулу (8.4a) можемо переписати інакше:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (8.5)$$

Цей вираз називають **рівнянням гармонічного осцилятора**; воно є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталим коефіцієнтом без першої похідної і без правої частини. Квадрат циклічної частоти означає, що коефіцієнт при змінній функції x завжди повинен бути додатним. Циклічну частоту ω називають циклічною частотою власних коливань осцилятора і позначають ω_0 .

Розв'язком рівняння гармонічного осцилятора є гармонічна функція, яка повинна задовольняти таку умову: квадрат циклічної частоти цієї функції повинен дорівнювати коефіцієнтові, який стоїть при змінній x у цьому рівнянні.

Справді, розв'язок рівняння гармонічного осцилятора легко відгадати, керуючись такими міркуваннями: сума другої похідної від функції x і самої функції x , помноженої на відповідний коефіцієнт, повинна дати в результаті нуль. Очевидно, що єдина функція, яка задовольняє таку умову, є синус або косинус. Переконаємось у правильності цього міркування. Нехай функція

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8.6)$$

є розв'язком рівняння (8.5). Візьмемо першу і другу похідну від функції (8.6):

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi); \quad (8.7)$$

$$\ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x. \quad (8.8)$$

Підставляння виразів (8.7) і (8.8) у рівняння (8.5) дає тотожність

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \equiv 0.$$

Отже, вираз (8.6) є розв'язком рівняння гармонічного осцилятора (8.5). Якщо, наприклад, для якогось фізичного процесу отримуємо рівняння

$$\ddot{x} + 4x = 0,$$

то це означає, що цей процес є гармонічним коливанням з циклічною частотою власних коливань $\omega_0 = 2$ рад/с, його записують так:

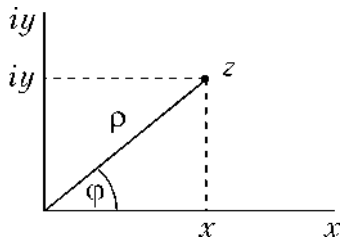
$$x = A \cos(2t + \varphi).$$

Зробимо **висновок**: якщо для якогось фізичного процесу отримуємо рівняння гармонічного осцилятора, то цей процес за заданих умов є гармонічним коливанням, а коефіцієнт при функції x дорівнює квадратові власної циклічної частоти цього гармонічного коливання.

8.3. Зображення гармонічних коливань у комплексній формі

Гармонічні коливання вигідно зображати у комплексній формі. Переваги комплексного зображення виявляються у математичних операціях, бо дії над степенями простіші, ніж над тригонометричними функціями.

Рис. 8.3. Зображення комплексного числа z



Комплексне число z – це сума дійсного й уявного чисел:

$$z = x + iy, \quad \text{де } i = \sqrt{-1}.$$

Число z можна записати ще так (рис. 8.3):

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

або, оскільки за формулою Ейлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad (8.9)$$

то

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Нехай маємо якесь гармонічне коливання

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

де $(\omega t + \varphi)$ – фаза коливання. У формі комплексного числа це гармонічне коливання записують так:

$$\tilde{x} = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Операцію, яку необхідно виконати з гармонічною функцією x , виконують як з показниковою функцією, а в кінці операції, перетворивши результат за формулою Ейлера у вираз (8.9), щоб отримати розв'язок, який має фізичний зміст, відкидають уявну і беруть лише дійсну частину.

8.4. Динаміка гармонічних коливань. Вільні коливання

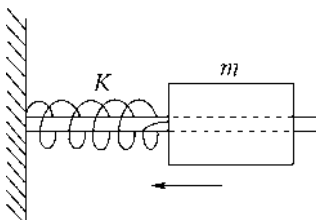
Якщо ізольовану систему вивести з положення стійкої рівноваги і залишити саму на себе, то під дією внутрішніх сил, що повертають систему в початкове положення, вона виконуватиме коливання, які називають **вільними** (власними). Внутрішніми силами можуть бути пружні та деякі інші, наприклад, квазіпружні сили. Квазіпружною називають силу, яка пропорційна до значення, що характеризує відхилення системи від положення рівноваги, і напрямлена в бік положення рівноваги. Прикладом квазіпружної сили є сила тяжіння.

Розглянемо вільне коливання тіла масою m , яке відбувається без тертя по горизонтальному стрижню під дією пружної сили $F = -kx$, де k – жорсткість пружини (рис. 8.4). Силу тяжіння зрівноважує реакція стрижня, тому її не враховуємо. Знайдемо період коливання.

Спочатку відшукаємо кінематичне рівняння руху тіла. Динамічне рівняння руху виглядає так:

$$F = ma,$$

Рис. 8.4 Під дією пружної сили тіло виконує гармонічні коливання



тобто

$$-kx = ma.$$

Прискорення тіла – це друга похідна за часом від зміщення x : $a = \ddot{x}$, і рівняння руху набуває вигляду

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Поділимо його на m і отримаємо рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

розв'язком якого, як нам відомо з (8.6), є гармонічна функція

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right).$$

Цей вираз є кінематичним рівнянням руху тіла. Тут

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0,$$

де ω_0 – циклічна частота власних коливань системи.

Період власних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Отже, період коливань маси під дією пружної сили прямо пропорційний до кореня квадратного з частки від ділення маси тіла на коефіцієнт жорсткості пружини.

8.5. Фізичний маятник

Як приклад іншої сили (квазіпружної), яка приводить до гармонічного коливання, розглянемо силу тяжіння, а коливання нехай виконує **фізичний маятник** – *тверде тіло, яке коливається навколо горизонтальної осі, що не проходить через центр мас тіла*. Виведемо закон його руху і період коливання T .

Складова сили тяжіння F_1 , яка діє на маятник, якщо він виведений з положення рівноваги, прикладена до центра мас маятника (рис. 8.5),

$$F_1 = -mg \sin \varphi.$$

Вона напрямлена в бік рівноваги і створює момент сили M відносно осі коливання O , перпендикулярної до площини рисунка:

$$M = F_1 d = -mgd \sin \varphi,$$

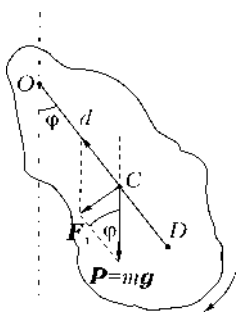


Рис. 8.5. Фізичному маятнику надає руху складова сили тяжіння F_1

де d – відстань від точки підвішення маятника до його центра мас. Знак мінус зумовлений тим, що поворотальна сила діє в бік зменшення кута φ (див. рис. 8.5).

Коливальний рух маятника можна вважати частиною обертального руху навколо горизонтальної осі, тому застосуємо до цього руху основне рівняння динаміки обертального руху:

$$M = I\ddot{\varphi}, \quad (8.10)$$

де $\ddot{\varphi}$ – кутове прискорення; I – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку підвішення. Підставимо у рівняння (8.10) момент сили M :

$$-mgd \sin \varphi = I\ddot{\varphi},$$

або

$$I\ddot{\varphi} + mgd \sin \varphi = 0. \quad (8.11)$$

Це складне рівняння, тому ми спростимо його, звівши до рівняння гармонічного осцилятора. Для цього будемо розглядати лише малі коливання і прийемо, що

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ (рад)}.$$

Тоді (8.11) перепишемо так:

$$I\ddot{\varphi} + mgd\varphi = 0,$$

або, поділивши на I :

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I} \varphi = 0. \quad (8.12)$$

Вираз (8.12) є рівнянням гармонічного осцилятора, у якому

$$\frac{mgd}{I} = \omega_0^2$$

– квадрат циклічної частоти власних коливань фізичного маятника. Отже, маятник виконує гармонічні коливання

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

період яких:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}. \quad (8.13)$$

Фізичний маятник має ту особливість, що в ньому є така точка D , розташована на продовженні лінії ОС (див. рис. 8.5), що коли його підвісити так, щоб вісь коливань проходила через точку D , то період коливань не зміниться. Такий фізичний маятник

називають оборотним. Визначивши на досліді d і період коливань T , за формулою (8.13) обчислюють значення g .

Зазначимо, що коливання фізичного маятника є гармонічними лише за умови, коли зв'язок сили, що спричинює коливання і зміщенням від положення рівноваги, є лінійний, тобто коли амплітуда коливання мала.

Як бачимо, гармонічні коливання тіло виконує не лише під дією пружної, а й квазіпружної сили.

8.6. Математичний маятник

Застосуємо формулу (8.13) до коливань **математичного маятника** – *матеріальної точки, підвішеної на нерозтяжній і невагомій нитці завдовжки l* . Момент інерції такого маятника відносно осі коливання $I = ml^2$. Підставивши значення моменту інерції математичного маятника у формулу для фізичного маятника (8.13) і взявши до уваги, що у нашому випадку $d=l$, знайдемо відому формулу для періоду малих коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Кожному математичному маятникові можна поставити у відповідність такий фізичний маятник, що їхні періоди будуть однакові. Це буде за умови, що I/md фізичного маятника дорівнюватиме довжині математичного маятника. Величину I/md *називають зведеною довжиною фізичного маятника*. Якщо математичний маятник має довжину, яка дорівнює зведеній довжині фізичного маятника, то їхні періоди коливань однакові.

Фізичний і математичний маятники застосовують для визначення прискорення вільного падіння тіл.

8.7. Енергія гармонічного коливання

Знайдемо енергію, яку має система (див. рис. 8.4), що виконує гармонічні коливання

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Ця енергія складається з кінетичної енергії рухомого тіла і потенціальної енергії деформованої пружини. Максимальну кінетичну енергію тіло має тоді, коли його швидкість максимальна, тобто коли воно проходить положення рівноваги:

$$W_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

а потенціальна енергія деформованої пружини максимальна тоді, коли тіло перебуває у крайньому положенні:

$$\Pi_{\max} = \frac{kA^2}{2}.$$

Оскільки

$$k = m\omega_0^2,$$

то для максимальної кінетичної енергії отримуємо вираз:

$$W_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{k v_{\max}^2}{2\omega_0^2} = \frac{kA^2}{2} = \Pi_{\max},$$

$$(v_{\max}^2 = \omega_0^2 A^2).$$

Отже, під час коливання кінетична енергія тіла повністю перетворюється у потенціальну енергію деформованої пружини.

Знайдемо повну енергію коливання у довільний момент часу. Кінетична енергія тіла

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.14)$$

Потенціальна енергія деформації

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.15)$$

Повну енергію отримаємо, додавши вирази (8.14) і (8.15):

$$E = W + \Pi = \frac{A^2}{2} [m\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + k \sin^2(\omega_0 t + \varphi)].$$

Підставимо значення $k = m\omega_0^2$ й отримаємо формулу

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Повна енергія гармонічного осцилятора в будь-який момент часу є сталою. Вона прямо пропорційна до маси тіла, квадрата амплітуди коливання і квадрата циклічної частоти. Те, що енергія гармонічного осцилятора є стала, можна пояснити тим, що вільні коливання відбуваються під дією пружної сили, яка є консервативною, а в замкненій системі, де діють лише консервативні сили, сума кінетичної і потенціальної енергій завжди стала.

8.8. Додавання коливань. Метод векторних діаграм

Гармонічні коливання можна зобразити у векторній формі. Переваги такого зображення в тому, що замість операцій над тригонометричними функціями можна виконувати дії з векторами. Розглянемо цей метод.

Зобразимо гармонічне коливання

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

у векторній формі так: з точки O (рис. 8.6) проведемо вісь відліку Ox і під кутом α до осі x відкладемо на ній вектор A , модуль

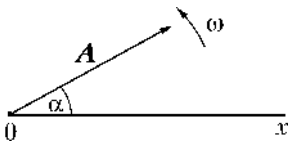


Рис. 8.6. Векторне зображення гармонічного коливання

якого дорівнює амплітуді коливання A . Уявимо собі, що цей вектор **обертається** навколо точки O проти годинникової стрілки у площині рисунка з циклічною частотою ω . Тоді проекцію вектора A на вісь x відображатиме рівняння, яке описує гармонічне коливання.

Застосуємо цей метод для додавання двох коливань x_1 і x_2 , які відбуваються в одному напрямі з однаковими частотами ω . Це може бути, наприклад, коливання кульки, підвішеної на пружині до стелі легкового автомобіля. Коливання кульки будуть складатися з власних коливань кульки і коливань автомобіля по нерівній дорозі:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1);$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Відшукаємо підсумкове коливання. Побудуємо векторну діаграму для цих двох коливань, відклавши вектори A_1 і A_2 під кутами до осі x , відповідно, α_1 та α_2 , і за правилом паралелограма проведемо підсумковий вектор A (рис. 8.7). Вектори A_1 і A_2 обертаються з кутовою швидкістю ω , тому підсумковий вектор A також обертатиметься з кутовою швидкістю ω , і отже, підсумкове коливання буде гармонічним з циклічною частотою ω :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

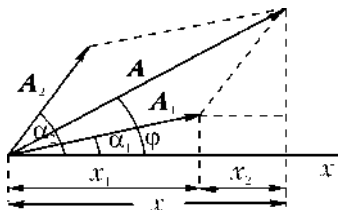


Рис. 8.7. Додавання двох коливань методом векторних діаграм

Невідомі амплітуду A і початкову фазу φ підсумкового коливання відшукаємо так. За теоремою косинусів для підсумкового вектора A маємо такий вираз:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Далі, для початкової фази φ отримуємо формулу

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Якщо різниця фаз двох коливань, які додаємо, кратна 2π , тобто

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi n,$$

де n – ціле число, то кажуть, що ці коливання збігаються за фазою.

Метод векторних діаграм значно спрощує операцію додавання коливань, його широко застосовують у радіотехніці, оптиці та інших галузях науки і техніки.

8.9. Биття

*Явище періодичної зміни амплітуди, яке виникає внаслідок додавання двох коливань з різними, але близькими частотами, називають **биттям**.* Його застосовують для настроювання музичних інструментів, аналізу змішаних частот, утворення проміжної частоти в супергетеродинних радіоприймачах тощо. Розглянемо природу цього явища.

Маємо два гармонічні коливання з однаковими амплітудами:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t;$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t,$$

причому $\omega_2 > \omega_1$ і

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1. \quad (8.16)$$

Знайдемо підсумкове коливання. Застосуємо **аналітичний метод**. Додамо перше коливання до другого й отримаємо

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t.$$

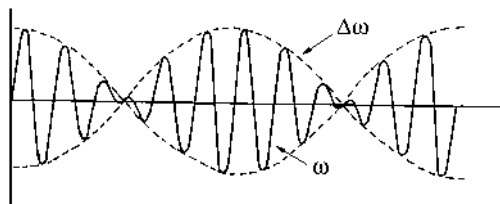
З (8.16) бачимо, що $\omega_2 \sim \omega_1$ тому одержуємо такий вираз:

$$x = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos \omega t.$$

Це складне коливання, у якому одна складова має велику частоту ω , інша – малу $\Delta\omega$ (рис. 8.8). Його можна трактувати як гармонічне коливання з частотою ω , амплітуда якого

$$A = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

Рис. 8.8. Биття створюване додаванням двох коливань з малою різницею частот



періодично змінюється з часом із частотою $\Delta\omega$, яка у двічі більша від частоти зміни косинуса (беремо за модулем). Підсумкове коливання зображено на рис.8.8 суцільною лінією, а коливання слабко змінної амплітуди – штриховою. Отже, частота биття

$$\Omega = \Delta\omega.$$

Розглянемо це явище інакше, застосувавши **графічний метод**. Додамо коливання методом векторних діаграм. Відкладемо вектор A_1 , який характеризує перше коливання, з точки O під довільним кутом до осі відліку x , вектор A_2 – з кінця першого вектора (рис. 8.9). Нехай $A_1 > A_2$. Вектор A_1 обертається навколо точки O з циклічною частотою ω_1 , вектор A_2 – навколо точки O' з циклічною частотою ω_2 і разом з вектором A_1 навколо точки O .

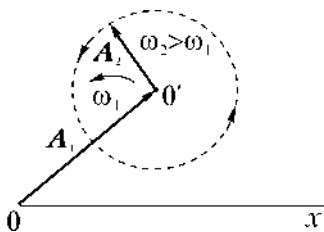


Рис. 8.9. Графічний метод додавання двох коливань з близькими частотами

Якщо $\omega_2 > \omega_1$, то підсумковий вектор повільно змінюватиметься у межах від $A_1 + A_2$ до $A_1 - A_2$ з циклічною частотою $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$, тобто частота биття дорівнюватиме $\Delta\omega$.

8.10. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Уявимо собі такий дослід. На шарнірі закріплено маятник, який коливається у площині, перпендикулярній до осі Ox , а сам шарнір під дією пружини коливається в напрямі осі Ox (рис. 8.10). Припустимо, що частоти обох коливань однакові й дорівнюють ω . Знайдемо рівняння підсумкового коливання маятника.

Кінематичні рівняння коливань будуть такі:

$$x = A \cos \omega t; \quad (8.17)$$

$$y = B \cos(\omega t + \alpha). \quad (8.18)$$

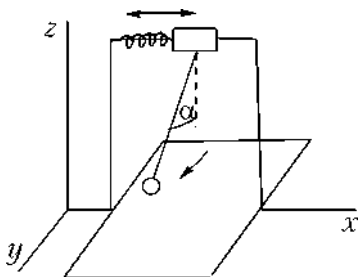


Рис. 8.10. Маятник бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях

Рівняння траєкторії маятника знайдемо, вилучивши з цих рівнянь час t :

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{x}{A}, \\ \sin \omega t &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Розгорнемо косинус рівняння (8.18) і підставимо туди значення $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$ із рівнянь (8.19):

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \alpha.$$

Після перетворень отримуємо

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (8.20)$$

Це рівняння **еліпса**, осі якого довільно орієнтовані відносно осей x і y .

Розглянемо часткові випадки.

1. $\alpha = 0$.

Рівняння (8.20) набуває такого вигляду:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0,$$

або

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$y = \frac{B}{A} x.$$

Це рівняння прямої. Маятник коливається **по прямій** у першій

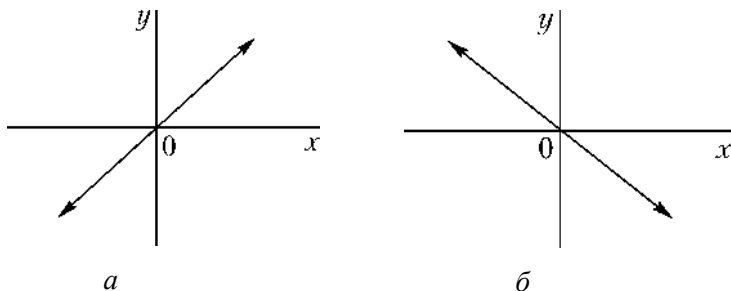


Рис. 8.11. Підсумковий рух маятника, що перебуває під дією двох синфазних (а) і антифазних (б) взаємно перпендикулярних коливань

і третій чвертях (рис. 8.11, *a*). Амплітуда коливання

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

і рівняння коливання виглядатиме так:

$$x = C \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t.$$

2. $\alpha = \pi$.

У такому разі рівняння (8.20) матиме вигляд

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$y = -\frac{B}{A}x.$$

Коливання відбуваються також по прямій, але в другій і четвертій чвертях (див. рис. 8.11, *б*).

3. $\alpha = \pi/2$.

Рівняння (8.20) переходить у рівняння **еліпса**, осі якого орієнтовані за осями координат x, y :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

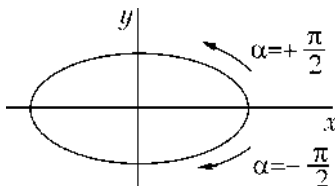


Рис. 8.12. Рух маятника, який виконує два взаємно перпендикулярні коливання, зсунуті за фазою на $\pi/2$

Якщо $\alpha = +\pi/2$, то маятник рухається проти годинникової стрілки, а якщо $\alpha = -\pi/2$, то за годинниковою стрілкою (рис. 8.12).

У разі рівності $A = B = R$ еліпс вироджується в **коло**, параметричне рівняння якого

$$x = R \cos \omega t ;$$

$$y = R \sin \omega t .$$

Це означає, що рівномірний рух по колу можна розглядати як суму двох взаємно перпендикулярних коливань.

8.11. Фігури Ліссажу

Фігура Ліссажу – це крива лінія, яку описує точка, що виконує складне коливання, яке є суперпозицією двох **взаємно перпендикулярних** коливань. Форма кривої залежить від частот і різниці фаз коливань. Якщо відношення частот кратне і різниця фаз $\alpha = \pi/2$, то фігура замкнена (рис. 8.13). Є правило, яке дає змогу знайти одну з частот, якщо відома інша: відношення частот дорівнює частці від ділення кількості дотиків кривої до лівого боку квадрата на кількість дотиків кривої до основи. Якщо відношення частот є ірраціональним числом, то крива незамкнена. Якщо фази коливань змінюються, то фігура Ліссажу деформується.

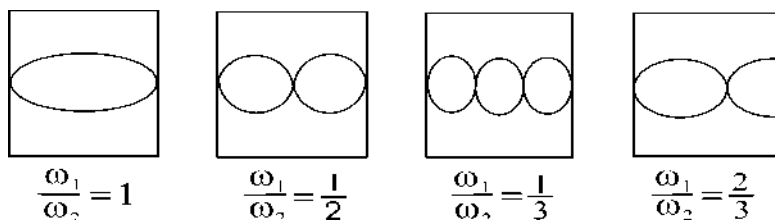


Рис. 8.13. Фігури Ліссажу

Аналіз фігур Ліссажу застосовують у дослідженнях частот і фаз складних коливань.

8.12. Згасальні коливання

На будь-яку реальну систему, яка виконує вільні коливання, крім пружної сили, діють ще сили тертя й опору, тому частина механічної енергії системи перетворюється у теплову, амплітуда коливань з часом зменшується, **коливання згасають**. Розглянемо характеристику згасальних коливань.

Нехай на тіло масою m діють пружна сила

$$F_1 = -kx$$

і протидійна сила, яку ми назвемо силою тертя. За малого тертя ця сила здебільшого пропорційна до швидкості руху:

$$F_2 = -r\dot{x} = -r\dot{x},$$

де r – коефіцієнт тертя. Знак мінус означає, що сила тертя протидіє рухові.

Складемо рівняння руху згасальних коливань

$$m\ddot{x} = F_1 + F_2,$$

тобто

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (8.21)$$

Позначимо

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta,$$

де β – коефіцієнт згасання.

Тоді рівняння (8.21) набуде такого вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.22)$$

Ми отримали однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Перш ніж розв'язувати це рівняння, зазначимо, що за наявності тертя й опору амплітуда згасальних коливань здебільшого зменшується за експоненціальним законом

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

де A_0 – початкова амплітуда. Це означає, що у розв’язку рівняння (8.22) повинна бути показникова функція $e^{-\beta t}$. Тому зробимо таку заміну змінних:

$$x = z e^{-\beta t}. \quad (8.23)$$

Візьмемо першу і другу похідну від виразу (8.23) і підставимо у рівняння (8.22). Після скорочення на $e^{-\beta t}$ отримаємо

$$\ddot{z} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (8.24)$$

Вираз (8.24) буде рівнянням гармонічного осцилятора за умови, що $(\omega_0^2 - \beta^2) > 0$. Це означає, що розв’язок рівняння (8.22) залежить від співвідношення між коефіцієнтами ω_0 і β .

Розглянемо два випадки.

1. $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$. Тертя мале.

Позначимо $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$. Тоді рівняння (8.24) є рівнянням гармонічного осцилятора, і розв’язком його буде

$$z = A_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Зваживши на (8.23), отримаємо розв’язок рівняння (8.22) у такому вигляді:

$$x = z e^{-\beta t} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Отже, кінематичне рівняння згасальних коливань має вигляд згасальної косинусоїди:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.25)$$

Графік цього коливання зображений на рис. 8.14. Вираз

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{r}{2m} t}$$

називають амплітудою згасальних коливань. Ця амплітуда зменшується з плином часу за експоненціальним законом тим швидше, чим більший коефіцієнт тертя γ (див. рис. 8.14).

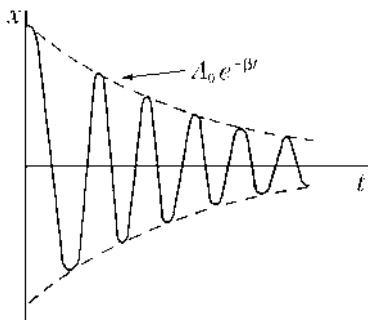


Рис. 8.14. Графік згасальних коливань

Згасальні коливання, власне кажучи, не є гармонічними, тобто не є періодичними в тому сенсі, що вони не повторюються в часі, бо амплітуда зменшується з часом. Проте величину

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

називають циклічною частотою згасаючих коливань. Період коливань також назвемо умовним:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Період згасальних коливань більший, ніж період відповідних вільних незгасальних коливань; тіло коливається повільніше, бо рухові протидіють сили тертя. Що більше тертя, то повільніші коливання.

Є дві величини, які характеризують швидкість згасання коливання: коефіцієнт згасання β і логарифмічний декремент згасання Δ . З'ясуємо зміст цих коефіцієнтів.

Уведемо інтервал часу τ такий, щоб за цей час амплітуда коливань зменшилась в e разів (e – основа натуральних логарифмів). Тоді відношення амплітуд коливання у моменти часу t і $(t + \tau)$

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e,$$

звідки

$$\beta\tau = 1, \text{ а } \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Фізичний зміст **коефіцієнта згасання** β такий: ця величина обернена до часу, за який амплітуда коливання зменшується в e разів. Інтервал часу τ називають часом релаксації.

Характеристика швидкості згасання коливань за допомогою коефіцієнта згасання недостатня. Розглянемо такий приклад. Маємо коливання двох маятників: першого з періодом коливань 1 с і другого – з періодом 0,1 с. Нехай обидва маятники мають однакові коефіцієнти згасання $\beta = 0,25 \text{ с}^{-1}$. За час $\tau = 1/\beta = 4 \text{ с}$ перший маятник зробить чотири коливання, а другий – сорок. Отже, другий маятник зробив більше коливань, хоча їхні коефіцієнти згасання однакові. Тому характеристику згасальних коливань треба пов'язати не лише з часом коливань, а й з їхнім періодом.

Логарифмічний декремент згасання Δ характеризує зменшення амплітуди коливання за один період. Він дорівнює логарифмові відношення двох послідовних амплітуд:

$$\Delta = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Отже, маємо такий зв'язок між коефіцієнтом згасання β і логарифмічним декрементом Δ :

$$\Delta = \beta T.$$

З'ясуємо фізичний зміст логарифмічного декременту згасання. Нехай n_e – кількість коливань, які відбулися за інтервал часу τ , тобто за час, коли амплітуда коливань зменшилася в e разів. Тоді

$$\Delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{T}{n_e T} = \frac{1}{n_e},$$

оскільки $\tau = n_e T$. Отже,

$$\Delta = \frac{1}{n_e}.$$

Логарифмічний декремент згасання – це величина, обернена до кількості коливань, упродовж яких амплітуда коливання зменшується в e разів.

Отже, коефіцієнт згасання характеризує зменшення коливань за одиницю часу, а логарифмічний декремент згасання – зменшення коливань за один період.

2. $\omega^2 - \beta^2 < 0$. **Тертя велике**, коливань немає, бо період

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

уявний, процес аперіодичний.

Знайдемо **критичні** умови переходу періодичного процесу в аперіодичний. Для критичного випадку маємо умову:

$$\omega_0^2 - \beta^2 = 0,$$

звідки

$$\omega_0^2 = \beta^2.$$

Підставимо відповідні значення ω_0 і β в останню формулу:

$$\frac{k}{m} = \frac{r^2}{4m^2}.$$

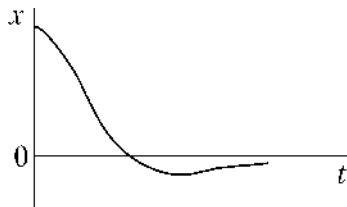


Рис. 8.15. Графік згасальних коливань за великого тертя

Скоротимо на m :

$$\frac{r^2}{4km} = 1. \quad (8.26)$$

Якщо коефіцієнт тертя r настільки великий, що умова (8.26) не виконується, то тіло, виведене з положення рівноваги, повільно наблизатиметься до точки рівноваги без коливань (рис. 8.15).

Коливальну систему характеризують також **добротністю** Q , яку виражають так:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\delta E} = \frac{\pi}{\Delta} = \pi n_e.$$

Фізичний зміст добротності полягає в тому, що вона дорівнює відношенню енергії коливання системи E до втрат енергії за один період δE , помноженому на 2π . Чим більша добротність, тим менше згасання коливань системи.

8.13. Вимушені коливання

Будь-яке реальне вільне коливання з часом згасає. Щоб коливання не згасали, енергію системи треба поповнювати. У механіці це можна зробити шляхом дії на систему зовнішньої періодичної сили.

Якщо на коливальну систему, крім пружної сили

$$F_1 = -kx$$

і сили тертя

$$F_2 = -r\dot{x},$$

діє ще зовнішня примусова періодична сила

$$F_3 = F_0 \cos \omega t,$$

то такі коливання називають **вимушеними**.

Складемо рівняння руху вимушених коливань

$$ma = F_1 + F_2 + F_3,$$

або

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Поділимо його на m і введемо позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{F_0}{m} = f_0,$$

тоді отримаємо рівняння руху системи:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t. \quad (8.27)$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння складається з загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (8.22) і часткового розв'язку неоднорідного рівняння (8.27). Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаємо – це рівняння (8.25) згасальних коливань. Такі коливання виникають під час початку дії на систему примусової сили і через проміжок часу τ вони практично згасають.

На початку дії примусової сили робота цієї сили більша від енергії, яка витрачається на тертя. Кінетична енергія й амплітуда коливань системи збільшуватимуться доти, доки вся енергія, яку вносить зовнішня сила, повністю не витратиться на подолання тертя (яке пропорційне до швидкості). Тому через час τ настає рівновага; сума кінетичної і потенціальної енергії буде стала. Ця умова характеризує стаціонарний стан системи, і далі коливання встановлюються у режимі гармонічних коливань (рис. 8.16) з частотою примусової сили. Унаслідок інерції системи її коливання будуть зсунуті по фазі стосовно миттєвого значення періодичної сили.

Припустимо, що коливальний процес встановився. Тоді нас цікавитиме лише частковий розв'язок рівняння (8.27), який шукатимемо у такому вигляді:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (8.28)$$

Як видно з рівняння (8.28), ми припускаємо, що вимушене коливання системи буде гармонічним з циклічною частотою ω , яка **дорівнює** циклічній частоті примусової сили, а фази коли-

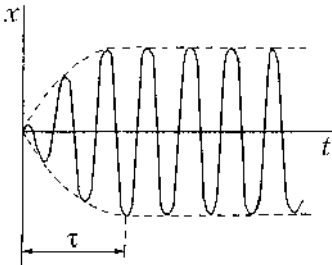


Рис. 8.16. Графік вимушених коливань

вань коливної системи і примусової сили будуть різні (φ – різниця фаз).

Щоб знайти невідомі амплітуду колювання A і зсув фаз φ , застосуємо два методи: аналітичний і графічний (метод векторних діаграм).

1. Аналітичний метод

Візьмемо першу і другу похідні від виразу (8.28) і підставимо їх у формулу (8.27). Отримаємо тотожність, яка переконує, що вираз (8.28) є розв'язком рівняння (8.27). Перша похідна

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi),$$

друга похідна

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi).$$

Підставимо ці вирази в рівняння (8.27). Згрупувавши члени, отримаємо

$$A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \varphi) - 2\omega\beta \sin(\omega t - \varphi)] = f_0 \cos \omega t.$$

Перетворимо цей вираз за відомими тригонометричними формулами:

$$\begin{aligned} & A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\omega\beta \sin \varphi] \cos \omega t + \\ & + A[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2\omega\beta \cos \varphi] \sin \omega t = f_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Щоб ця рівність виконувалась за усіх t , коефіцієнти при $\sin \omega t$ і, окремо, при $\cos \omega t$ повинні бути однакові. Отже, отримаємо два рівняння:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2A\omega\beta \sin \varphi = f_0;$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2A\omega\beta \cos \varphi = 0.$$

Розв'яжемо ці рівняння стосовно A і φ . Піднесемо обидва рівняння до квадрата і додамо їх:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2 = f_0^2.$$

Звідси

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (8.29)$$

З другого рівняння

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8.30)$$

Між коливанням системи (зміщення) і примусової сили є зсув фаз φ , причиною якого, як уже зазначено, є інертність системи і сила тертя (опору).

2. Графічний метод

Першу і другу похідні від функції (8.28) запишемо так:

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi).$$

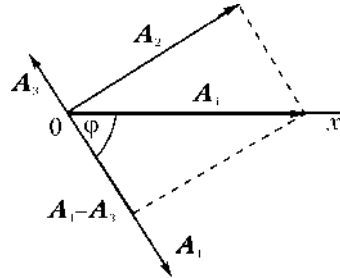
Підставимо ці вирази у формулу (8.27):

$$\begin{aligned} A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2A\beta\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Як бачимо, гармонічну функцію $f_0 \cos \omega t$ можна розглядати як рівняння гармонічного коливання, яке є сумою трьох гармонічних коливань однієї частоти, відображених у лівій частині рівняння (8.31). Щоб знайти цю суму методом векторних діаграм, функцію $A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi)$ зобразимо вектором A_1 завдовжки $A\omega_0^2$, напрямленим праворуч від точки O під кутом $(-\varphi)$ до лінії відліку Ox (рис. 8.17), а функцію $2A\beta\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ – век-

тором A_2 завдовжки $2A\beta\omega$, повернутим на кут $\pi/2$ стосовно

Рис. 8.17. Графічний метод розв'язування рівняння вимушених коливань



вектора A_1 і, нарешті, функцію $A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$ – вектором A_3 завдовжки $A\omega^2$, напрямленим у протилежний бік до вектора A_1 .

Відповідно до (8.31) коливання правої частини рівняння повинно дорівнювати сумі коливань трьох членів у лівій частині рівняння, тобто три вектори A_1 , A_2 і A_3 в сумі повинні дати невідомий вектор A_4 . Він, як бачимо, збігається з віссю Ox . Його значення знайдемо, застосувавши теорему Піфагора:

$$(A_1 - A_3)^2 + A_2^2 = A_4^2,$$

або, підставивши значення векторів, одержимо:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4A^2\beta^2\omega^2 = f_0^2.$$

Звідси

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ми отримали ті ж самі результати, що й за допомогою попереднього методу.

Дослідимо, як залежить амплітуда коливання A (8.29) від циклічної частоти ω примусової сили.

1. $\omega = 0$. Тоді

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

тобто **коливань нема**, є лише зміщення системи, яке відповідає статичній деформації системи під дією сили F_0 :

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

2. $\beta = r/2m = 0$. Зі збільшенням циклічної частоти амплітуда коливання A зростає, а коли $\omega = \omega_0$, вона стає **безмежно** велика. Під час подальшого збільшення частоти амплітуда коливання зменшується, прямує до нуля (рис. 8.19).

3. $\beta \neq 0$. Амплітуда коливання зі збільшенням частоти, починаючи від нуля, зростає і досягає **максимального** значення тоді, коли знаменник правої частини виразу (8.29) має мінімум. Узявши похідну від підкореневого виразу формули (8.29) і прирівнявши її до нуля, знайдемо умову мінімуму знаменника:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{\text{дл}}^2)\omega_{\text{рез}} + 8\beta^2\omega_{\text{дл}} = 0,$$

де $\omega_{\text{рез}}$ – те значення циклічної частоти примусової сили, для якого $A = A_{\text{max}}$. Для $\omega_{\text{рез}}$ одержуємо вираз

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Отже, резонансна частота $\omega_{\text{рез}}$ дещо менша від частоти власних коливань системи ω_0 .

Явище стрімкого збільшення амплітуди вимушених коливань, коли частота примусової сили наближається до значення

власної частоти коливань системи, називають **резонансом**. Максимальне значення амплітуди коливання під час резонансу дуже залежить від тертя (рис. 8.19).

За малого тертя

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega_0\beta}.$$

Порівняємо $A_{\max}$ зі зміщенням A_0 системи під дією статичної сили:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{F_0 m \omega_0^2}{2m\omega_0\beta F_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Як бачимо, для систем з малим β це відношення може бути дуже великим.

Аналіз формули (8.30) свідчить, що зсув фаз між коливанням зміщення системи і сили, що діє під час резонансу, дорівнює $\pi/2$.

Справді, якщо $\omega \rightarrow \omega_0$, то $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$ і $\varphi \rightarrow \pi/2$, тобто під час резонансу коливання системи відстають від коливань примусової сили на $\pi/2$ (рис.8.20).

Явище резонансу може бути корисним і шкідливим. У радіотехніці його застосовують для підсилення електричних сигналів, в акустиці – для аналізу звуку. У механічних конструкціях, наприклад, у машинах, літаках, будівельних спорудах, які зазнають дії періодично змінних навантажень, резонанс дуже небезпечний, за малого тертя він мо-

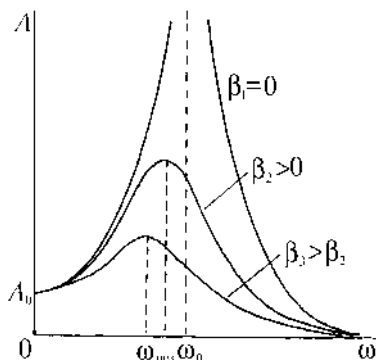


Рис. 8.19. Амплітудна характеристика вимушених коливань

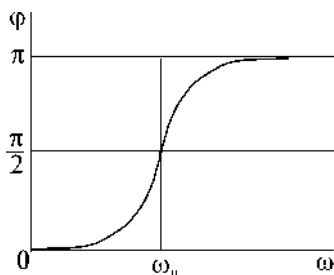


Рис. 8.20. Частотна характеристика вимушених коливань

же зумовити вібрацію всієї конструкції і призвести до її руйнування.

Коливання реальної коливної системи можна зробити незгасальними й іншим способом, наприклад, шляхом поповнення втрат енергії від зовнішнього джерела самою коливальною системою. За допомогою спеціального механізму система сама забезпечуватиме передавання енергії від джерела до системи порціями за кожний період коливань, компенсуючи втрати власної енергії. Такі коливання називають **автоколиваннями**, їхнє значення в техніці дуже важливе. Характерним для автоколивної системи є те, що тут коливання не нав'язує системі зовнішня сила, а їх підтримує погоджена дія самої системи. Прикладом автоколивної системи може бути механічний годинник з його храповим механізмом, коливання струни в смичковому інструменті, двигун внутрішнього згорання, генератор електричних коливань тощо.

8.14. Поняття про коливання пов'язаних систем

Найпростішою коливною системою є математичний маятник. Залежно від типу підвісу він може мати різне число ступенів вільності. Маятник 1, підвішений на жорсткому підвісі (рис. 8.21), має один ступінь вільності, він може коливатися лише в одній

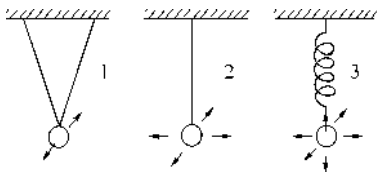


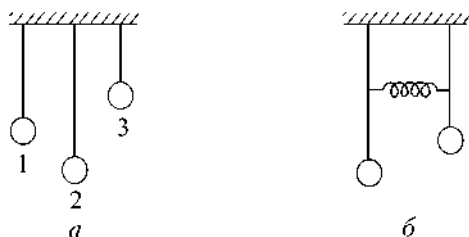
Рис. 8.21. Різні ступені вільності маятників

площині, перпендикулярній до площини рисунка. Маятник 2 має два ступені вільності і може коливатись як у площині рисунка, так і в перпендикулярній площині. Підвішений на пружині маятник 3 має три ступені вільності.

Складні коливні системи, наприклад, декілька математичних маятників можуть бути незалежними або зв'язаними. У такому разі число ступенів вільності коливних систем залежатиме від характеру зв'язків між тілами, які коливаються. Наприклад, ко-

ливання маятників, зображених на рис. 8.22, *а*, незалежні, а система двох маятників, з'єднаних пружиною, є пружно зв'язаною системою (див. рис. 8.22, *б*). Така система пружно пов'язаних маятників має чотири ступені вільності, маятники по-різному можуть коливатись у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Рис. 8.22. Незалежні (*а*) і пов'язані (*б*) коливні системи



Розглянемо це детальніше. Відхилимо обидва маятники в площині рисунка в один бік на однакові кути α (рис. 8.23, *а*) і відпустимо, тоді вони будуть коливатися з якоюсь циклічною частотою ω_1 . Це синфазні коливання. Якщо маятники відхилити в різні боки на кути φ (див. рис. 8.23, *б*), то коливання відбуватимуться з іншою частотою ω_2 . Це антифазні коливання. Довільні коливання в площині рисунка можна розглядати як суму цих двох коливань з частотами ω_1 і ω_2 , тобто як биття. Частоти ω_1 і ω_2 називають власними, або нормальними, частотами системи двох маятників.

Аналогічно отримаємо ще два види коливань з частотами ω_3 і ω_4 у площині, перпендикулярній до площини рисунка, коли обидва маятники відхилити в один або в різні боки на однакові кути.

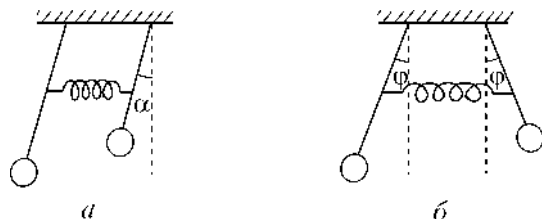


Рис. 8.23. Система двох пружно пов'язаних маятників має чотири ступені вільності

Дослідженням коливання такої системи можна з'ясувати, що зв'язані системи під час коливання **обмінюються енергією**. Зовнішньою силою, яка збуджує коливання, може слугувати інша коливна система, пружно пов'язана з першою. Обидві коливні системи можуть діяти одна на одну. Таким, наприклад, є випадок двох пов'язаних маятників. Справді, відхилимо один з маятників, притримавши інший, а потім відпустимо їх одночасно. Записавши на одному папері графіки коливань обох маятників, отримаємо картину, показану на рис. 8.24. Спочатку коливається лише один лівий маятник; сила пружності буде поступово

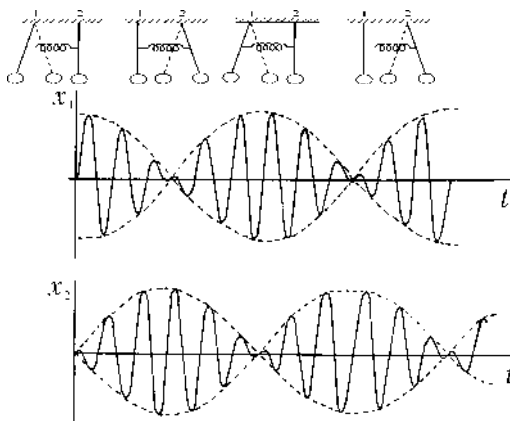


Рис. 8.24. Два маятники пов'язаної системи обмінюються енергією

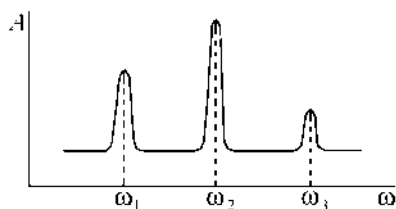
розгойдувати другий маятник, й енергія першого передаватиметься другому маятникові. У результаті амплітуда коливань першого маятника зменшиться, а другого – збільшиться. Це триватиме деякий час $T/2$, доки перший маятник не зупиниться, а другий розгойдається майже до такої ж амплітуди, як спочатку перший. Потім маятники поміняються ролями. Такі коливання – це биття з періодом T . Повний рух двох маятників з чотирма ступенями вільності (пружний зв'язок) є суперпозицією чотирьох коливань з частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, він значно складніший.

Дослідження зв'язаних коливних систем зводиться до знаходження нормальних частот.

Під час дії на систему періодично змінної сили, частота якої змінюється, можна спостерігати декілька резонансів (рис. 8.25), коли одна з власних частот коливань системи буде збігатися з частотою зовнішньої сили. Система з n ступенями вільності матиме криву з n резонансними горбами.

Атоми у вузлах кристалічної ґратки можна вважати зв'язаною коливною системою з пружними зв'язками між атомами. Якщо у вузлі ґратки є молекула, що має n атомів, то така зв'язана коливна система має $3n$ ступенів вільності і, відповідно, $3n$ нормальних частот коливань.

Рис. 8.25. Резонансні максимуми пов'язаної коливної системи



Збудити коливання атомів у молекулі можна шляхом опромінення речовини інфрачервоними променями різних довжин. Спектр поглинання дає змогу визначити частоту власних коливань атомів і знайти структуру молекули.

8.15. Коливання молекули

Як приклад коливання пов'язаної системи розглянемо коливання двохатомної молекули. Вважатимемо коливання невеликими і гармонічними, тому сила взаємодії між двома атомами буде пружною, тобто

$$F = -kx,$$

де x – відхилення атомів від положення рівноваги.

Скористаємося поняттям про зведену масу атомів. Це поняття вводять за умови, що рух двох тіл масами m_1 і m_2 навколо спільного центра мас можна замінити рухом їхньої зведеної маси m навколо точки розташування однієї з мас. До того ж, повинна виконуватися така умова:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m v^2}{2},$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

де m – зведена маса тіл; v – швидкість руху зведеної маси.

Частоту коливань шукаємо за відомою формулою

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Цю частоту також можна визначити з експериментальних оптичних спектрів поглинання газу цих молекул. На підставі таких даних відшукаємо силову константу k взаємодії у молекулі NaCl.

Для зведеної маси маємо

$$m = \frac{23 \cdot 35,5}{23 + 35,5} = 14 \text{ а.о.м.} = 2,32 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Експериментально визначена частота коливань молекули NaCl за частотою поглинання в інфрачервоній ділянці оптичного спектра дорівнює $1,14 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Отже,

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1,14 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

Звідси

$$k = 1,2 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Як бачимо, ця константа має такий самий порядок, як і силова стала пружини з м'якої сталі. Цей факт дає наближене уявлення про значення міжатомних сил. Силова стала k дуже залежить від природи атомів і кратності їхнього зв'язку, тобто вона характеризує валентний зв'язок, до того ж, часто навіть ліпше, ніж енергія зв'язку.

Знайдемо енергію цих коливань. Припустимо, що амплітуда коливань становить 5% від рівноважної відстані між іонами в молекулі NaCl. Ця відстань, визначена за оптичним спектром або

за дифракцією електронів, дорівнює 2,5 Ангстрема*. Тоді для амплітуди коливань молекули маємо : $A = 0,14 \cdot 10^{-10}$ м.

Енергія коливань

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = 0,5 \cdot 1,2 \cdot 10^2 \cdot 0,14^2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 1,2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} = 0,07 \text{ еВ}^{**}.$$

В атомних масштабах це не дуже велика енергія. Вона становить лише близько 2% від хімічної енергії зв'язку (3,6 еВ) молекули NaCl.

Під час коливань молекула NaCl може випромінювати енергію, зменшуючи амплітуду коливань з коефіцієнтом згасання, який дорівнює близько 10^3 с^{-1} . Отже, час релаксації буде дорівнювати приблизно 10^{-3} с , проте атом виконає за цей час 10^{10} коливань. Після згасання коливань молекула повертається у свій найнижчий основний енергетичний стан.

8.16. Поняття про розклад Фур'є

Більшість коливних процесів періодичні, проте ангармонічні, тобто їх не можна зобразити гармонічними функціями синуса чи косинуса (рис. 8.26).

Теорема Фур'є твердить, що будь-який періодичний процес із періодом $T = 2\pi/\omega$, де ω – циклічна частота, можна описати як суму нескінченного ряду функцій гармонічних коливань з частотами ω_n , кратними основній частоті ω .

Нехай $f(t)$ – періодична функція з циклічною частотою ω . За теоремою Фур'є її можна записати так:

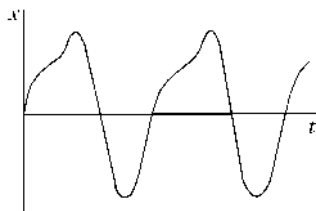


Рис. 8.26. Графік періодичного негармонічного коливання

*Ангстрем (Å) – одиниця довжини, $1 \text{ Å} = 10^{-10}$ м.

**Електрон-вольт (еВ) – одиниця енергії, яку застосовують для вимірювання енергії і маси мікрочастинок, $1 \text{ еВ} = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж.

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t.$$

Сукупність частот $\omega, 2\omega, 3\omega \dots n\omega$ і відповідні їм амплітуди ряду Фур'є $A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ утворюють спектр коливань, який є дискретним.

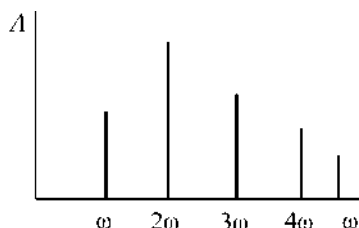


Рис. 8.27. Спектр складного коливання

Цей спектр можна зобразити на графіку так, щоб кожній частоті відповідав певний відрізок на осі частот, висота якого пропорційна до амплітуди відповідного коливання (рис. 8.27).

Частоту ω називають основною, а $2\omega, 3\omega \dots n\omega$ — вищими гармоніками від основної частоти.

Контрольні запитання

1. Запишіть рівняння гармонічного коливання.
2. Який вираз називають рівнянням гармонічного осцилятора?
3. Як виглядає рівняння гармонічного коливання в комплексній формі?
4. Які коливання називають вільними?
5. Що таке фізичний маятник?
6. Що можна сказати про повну енергію гармонічного осцилятора?
7. У чому полягає ідея методу векторних діаграм?
8. Що таке биття?
9. Який фізичний зміст коефіцієнта згасання?
10. Яке коливання називають вимушеним?
11. Від чого залежить амплітуда вимушених коливань?
12. Що таке резонанс?
13. Які коливання системи називають пов'язаними? Наведіть приклад.

Приклади розв'язування задач

8.1. Запишіть рівняння гармонічного коливання точки, якщо максимальне її прискорення $a_{\max} = 0,493 \text{ м/с}^2$, період коливань $T = 2 \text{ с}$ і зміщення точки від положення рівноваги у початковий момент часу становило 25 мм .

Розв'язування. Загальне рівняння гармонічного коливання має вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Прискорення точки – це друга похідна від зміщення:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi).$$

Максимальне прискорення маємо тоді, коли $\sin(\omega t + \varphi) = 1$. Отже,

$$a_{\max} = -\omega^2 A = -\left(\frac{2\pi}{\dot{O}}\right)^2 \dot{A},$$

звідки

$$\dot{A} = -\frac{\dot{a}_{\max} \dot{O}^2}{4\pi^2} \Rightarrow A = \frac{0,493 \cdot 2^2}{4 \cdot 3,14^2} = 4,99 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 0,05 \text{ м}.$$

Початкову фазу φ знайдемо з початкових умов. Якщо $t=0$, то з рівняння коливання (1) отримуємо такий вираз:

$$0,025 = 0,05 \sin \varphi, \quad \sin \varphi = \frac{0,025}{0,05} = 0,5,$$

звідки $\varphi = \pi/6$. Отже, рівняння гармонічного коливання точки виглядає

так:

$$x = 0,05 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ м}.$$

8.2. На кінцях довгого невагомого стрижня завдовжки $L=1$ м закріплені дві кулі масами $m_1=1$ кг і $m_2=2$ кг. Знайдіть період малих коливань системи навколо горизонтальної осі, що проходить через середину стрижня перпендикулярно до нього.

Розв'язування. Маємо фізичний маятник, період коливань якого

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (1)$$

Тут I – момент інерції системи відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу (середину стрижня); l – відстань від точки підвісу маятника до його центра мас. За умовою задачі стрижень невагомий, тому момент інерції системи є сумою моментів інерції куль відносно осі, що проходить через середину стрижня:

$$I = I_1 + I_2 = m_1 \left(\frac{L}{2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \left(\frac{L}{2} \right)^2 (m_1 + m_2).$$

Шукаємо розташування центра мас. Проведемо вісь відліку вздовж стрижня вниз від точки підвісу системи. Застосуємо формулу (2.2) для визначення радіуса-вектора центра мас системи:

$$R = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}.$$

Для нашого випадку ця формула матиме такий вигляд:

$$l = \frac{m_1 \left(-\frac{L}{2} \right) + m_2 \left(+\frac{L}{2} \right)}{m_1 + m_2} = \frac{L(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2)}.$$

Підставимо отримані вирази для I і l у формулу (1) для періоду коливань системи:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{(m_1 + m_2) \cdot 2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)gL(m_2 - m_1)}} = 2\pi \sqrt{\frac{L(m_1 + m_2)}{2g(m_2 - m_1)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1 \cdot (1 + 2)}{2 \cdot 9,81 \cdot (2 - 1)}} = 2,46 \text{ с.} \end{aligned}$$

8.3. Маятник, період коливань якого становить 1 с, виконує згасальні коливання з логарифмічним декрементом згасання $\Delta=0,05$. Через який час енергія коливань маятника зменшиться в 10 разів?

Розв'язування. Амплітуда згасальних коливань зменшується з часом за формулою

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\Delta}{T} t},$$

де T – умовний період згасальних коливань; β – коефіцієнт згасання, пов'язаний з логарифмічним декрементом згасання формулою $\Delta = \beta T$. Припустимо, що на час t_1 амплітуда коливань була A_1 , а на час t_2 – A_2 . Енергія коливань E пропорційна до добутку квадратів амплітуди на частоту. Частота коливань стала, бо період коливань сталий, отже, відношення енергії коливань дорівнює квадрату відношення амплітуд:

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 = e^{\frac{2\Delta}{T}(t_2 - t_1)} = e^{\frac{2\Delta}{T} \tau},$$

де $\tau = t_2 - t_1$. Отже,

$$\tau = \frac{T}{2\Delta} \ln \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2 \cdot 0,05} \cdot 2,30 = 23 \text{ с.}$$

Задачі

8.1. Амплітуда гармонічного коливання точки $A=50$ мм, період $T=4$ с, початкова фаза $\varphi=\pi/4$. Знайдіть зміщення коливальної точки від положення рівноваги у початковий момент часу.

Відповідь: 35,2 мм.

8.2. Точка виконує гармонічні коливання з амплітудою $A=20$ см і періодом $T=9$ с без початкової фази. Яка швидкість точки через 1,5 с після початку коливань?

Відповідь: 7 см/с.

8.3. До пружини підвішено вантаж масою 10 кг. Відомо, що пружина під дією сили 9,8 Н розтягується на 1,5 см. Визначте період вертикальних коливань вантажу.

Відповідь: 0,78 с.

8.4. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях з однаковими частотами й однаковими початковими фазами. Амплітуда одного коливання 3 см, іншого 4 см. Визначте амплітуду підсумкового коливання.

Відповідь: 5 см.

8.5. Математичний маятник виконує згасальні коливання з логарифмічним декрементом згасання 0,2. У скільки разів зменшиться повне прискорення маятника в його крайньому положенні за одне коливання?

Відповідь: 1,22 раза.

8.6. Кулька масою 50 г, що висить на вертикальній пружині, прикріпленій до стелі вагона, робить вертикальні коливання. Коефіцієнт жорсткості пружини 2 Н/м. З якою швидкістю повинен рухатися вагон, щоб коливання кульки були дуже великими під час удару коліс об стики рейок? Довжина рейок 19,9 м.

Відповідь: 20 м/с.

Розділ 8 КОЛИВАННЯ	152
8.1. Кінематика коливань	152
8.2. Швидкість і прискорення у коливальному русі. Рівняння гармонічного осцилятора.....	154
8.3. Зображення гармонічних коливань у комплексній формі.....	157
8.4. Динаміка гармонічних коливань. Вільні коливання	158
8.5. Фізичний маятник.....	160
8.6. Математичний маятник.....	162
8.7. Енергія гармонічного коливання	162
8.8. Додавання коливань. Метод векторних діаграм.....	164
8.9. Биття.....	166
8.10. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	168
8.11. Фігури Ліссажу	171
8.12. Згасальні коливання	172
8.13. Вимушені коливання	177
8.14. Поняття про коливання пов'язаних систем.....	184
8.15. Коливання молекули	187
8.16. Поняття про розклад Фур'є	189
Контрольні запитання	190
Приклади розв'язування задач	190
Задачі.....	193

Розділ 9

ПРУЖНІ ХВИЛІ

Пружне середовище можна уявити собі як систему безлічі пружно пов'язаних маятників з нескінченно малою масою. Якщо у такому середовищі збудити коливання, то частинки середовища почнуть коливатися і передаватимуть енергію коливання сусіднім частинкам, які, з деяким запізненням, також почнуть коливатися.

Процес поширення коливань у просторі називають хвилею. Пружна хвиля – це процес поширення механічних коливань у пружному середовищі. Електромагнітна хвиля може поширюватися не лише в середовищі, а й у вакуумі.

9.1. Характеристика хвилі

Хвилю характеризують швидкість поширення v , частота ν і довжина хвилі λ . **Довжина хвилі λ** – це найкоротша відстань між двома точками, які коливаються в однакових фазах (рис. 9.1). Між довжиною хвилі λ , швидкістю її поширення v і періодом коливань T або частотою ν є простий зв'язок:

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Існують поздовжні і поперечні хвилі. У **поздовжній хвилі** частинки середовища коливаються у напрямі поширення хвилі, а в **поперечній** – у перпендикулярному напрямі. Поздовжні хвилі мо-

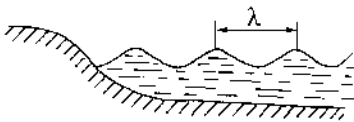


Рис. 9.1. Хвилі на поверхні рідини

жуть бути у твердих тілах, рідинах і газах, тобто в середовищах, у яких виникають пружні сили під час деформації розтягу і стиску, а поперечні хвилі – лише у твердих тілах, де можливі пружні сили у деформаціях зсуву. Поширюючись

у просторі від одних ділянок до інших, хвиля надає коливального руху щораз новим частинкам середовища. *Геометричне місце точок, до яких доходять коливання на заданий момент часу, називають фронтом хвилі.* Всі точки фронту хвилі, очевидно, мають нульову різницю фаз. **Хвильова поверхня** – це геометричне місце точок, у яких коливання відбуваються в однакових фазах. Отже, фронт хвилі також є однією з хвильових поверхонь. Хвильові поверхні можуть мати різну форму, яка залежить від конфігурації джерела і властивостей середовища. Найпростішими є плоскі і сферичні хвильові поверхні. Хвилі, які створюють такі поверхні, називають, відповідно, плоскими і сферичними. Будемо далі розглядати лише плоскі хвилі, у яких хвильовою поверхнею є площина, перпендикулярна до напрямку поширення хвилі.

9.2. Рівняння плоскої хвилі

Знайдемо рівняння, яке дасть змогу визначити зміщення частинок середовища в їхньому коливальному русі у кожний момент часу. Припустимо, що у пружному середовищі у площині $x=0$ (рис. 9.2) (перпендикулярній до осі Ox) є плоский генератор гармонічних коливань, який періодично зміщує частинки середовища, що лежать у площині $x=0$, у напрямі осі x . Унаслідок пружного зв'язку між частинками середовища коливання будуть переходити від одних частинок до інших, і в напрямі осі Ox поширюватиметься плоска поздовжня хвиля. Запишемо рівняння гармонічних коливань частинок біля генератора у площині $x=0$:

$$\xi = A \cos \omega t,$$

де ξ – зміщення частинок середовища; ω – циклічна частота коливань; A – амплітуда коливань.

До площини з координатою x коливання надійдуть із запізненням на час $\tau=x/v$, де v – швидкість поширення хвилі, тому рівняння коливання точок середовища у цій площині матиме вигляд

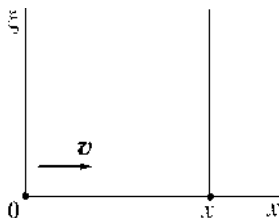


Рис. 9.2. У напрямі Ox поширюється плоска хвиля

$$\xi = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Рівняння

$$\xi = A \cos \omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

називають **рівнянням плоскої хвилі**, яка поширюється у напрямі осі x . Воно визначає залежність зміщення частинок середовища як функцію від координати x і часу t . Підставимо у це рівняння значення швидкості з виразу

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda \omega}{2\pi}.$$

Тоді рівняння хвилі набуде вигляду

$$\xi = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Уведемо хвильове число $k = 2\pi/\lambda$, тоді рівняння хвилі стане симетричне стосовно x і t :

$$\xi = A \cos(\omega t - kx).$$

У плоскій незгасальній хвилі амплітуда коливання частинок середовища не змінюється під час поширення хвилі у просторі. Якщо хвилю породжує точкове джерело, розташоване в ізотропному середовищі, то хвиля поширюватиметься з однаковою швидкістю в усіх напрямках і буде сферичною. Амплітуда коливання частинок сферичної хвилі залежить від координати точки, тому рівняння сферичної хвилі на великих відстанях від її джерела виглядає так:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}),$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор точки, до якої дійшла хвиля на час t ; A – амплітуда коливань частинок у точці з координатою $r=1$; $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$. Тут $\mathbf{n}$ – одиничний вектор у напрямі поширення хвилі.

Рівняння хвилі можна записати у комплексній формі. Для сферичної хвилі воно виглядає так:

$$\xi = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}.$$

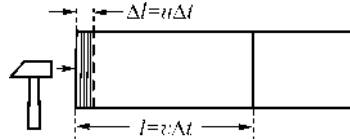
9.3. Поширення хвиль у пружному середовищі

Припустимо, що в однорідному пружному середовищі густиною ρ у напрямі осі x поширюється поздовжня плоска хвиля

$$\xi = A \cos(\omega t - kx).$$

Знайдемо зв'язок швидкості поширення поздовжньої хвилі з величинами, які характеризують це середовище.

Рис. 9.3. Унаслідок короткочасної дії сили на кінець стрижня в ньому виникає хвильовий імпульс, який поширюється по всьому стрижню



Уважатимемо, що поздовжня хвиля виникла у пружному стрижні поперечного перерізу S (рис. 9.3) унаслідок короткочасної дії сили на його кінець (удар молотка). Ця сила за час Δt зумовила зміщення частинок кінця стрижня на відстань Δl зі швидкістю u , а потім деформація, яка виникла внаслідок дії цієї сили, перемістилася вздовж стрижня на відрізок $l = v \Delta t$ зі швидкістю поширення хвилі v , зумовлюючи в стрижні поширення хвильового імпульсу стиску і розтягу. Пружні сили зрушили з місця частинки ділянки стрижня довжиною l , маса яких

$$\Delta m = \rho S l = \rho S v \Delta t,$$

зі швидкістю

$$u = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

За другим законом Ньютона імпульс сили, який подіяв на торець стрижня $F \Delta t$, дорівнює зміні імпульсу цієї частини стрижня, яка під дією пружної сили була зрушена з місця, тобто

$$F\Delta t = \Delta mu,$$

або

$$F\Delta t = \rho S v u \Delta t,$$

звідки

$$\frac{F}{S} = \rho v u.$$

Відношення сили до площі, на яку діє сила, є напруженням. За законом Гука напруження прямо пропорційне до відносного видовження $\Delta l/l$, тобто

$$\frac{F}{S} = \sigma = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Прирівняємо праві сторони двох останніх рівнянь і отримаємо

$$\rho v u = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Помноживши і поділивши праву сторону останнього рівняння на Δt , запишемо її так:

$$E \frac{\Delta l}{\Delta t} \frac{\Delta t}{l} = E \frac{u}{v},$$

бо $l/\Delta t$ – швидкість хвилі v . Отже,

$$\rho v u = E \frac{u}{v},$$

і для швидкості поздовжньої хвилі в пружному середовищі остаточно отримуємо

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (9.1)$$

За допомогою формули, яку ми отримали, можна визначити швидкість хвиль будь-якого типу в довільному середовищі. Під коренем у чисельнику треба розуміти модуль пружності, який відповідає тій деформації, яка відбувається у тілі під час проходження хвилі. Наприклад, для швидкості поширення поперечної хвилі $v_{\perp}$ у формулі (9.1) буде модуль зсуву G , і вона виглядатиме так:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Відомо, що модуль зсуву G у два-три рази менший від модуля Юнга E . Отже, швидкість поширення поздовжньої хвилі у твердому тілі завжди більша від швидкості поширення поперечної. Тому під час землетрусу або потужного ядерного вибуху на деякій відстані від епіцентра звичайно реєструють два послідовні поштовхи один за одним через невеликий інтервал часу. Спочатку з'являється поздовжня хвиля збурення, а потім – поперечна. Інтервал часу між надходженнями цих хвиль дає змогу визначити відстань до епіцентра явища, яке зумовило сейсмічні хвилі.

Швидкість поширення хвиль на поверхні рідини залежить від їхньої амплітуди.

9.4. Стоячі хвилі

Ми живемо в світі різних звуків і світлових кольорів, тобто в середовищі, де одночасно поширюються багато різноманітних хвиль. Досвід свідчить, що зіткнення декількох хвиль ніяк не впливає на їхній подальший рух. Цю властивість хвиль називають принципом суперпозиції хвиль: *якщо в середовищі одночасно поширюються дві або декілька хвиль, то кожна з них веде себе так, ніби інших хвиль нема*. Ілюстрацією цього принципу може бути те, що різні звуки, які надходять від оркестру, не спотворюють один одного: ми чуємо правильні звуки всіх інструментів.

Хвиля збуджує в кожній точці простору коливання. Якщо різниця фаз коливань, що їх збуджують хвилі в кожній точці середовища є сталою, то такі хвилі називають когерентними. Під час накладання двох когерентних хвиль у відповідних точках простору внаслідок додавання коливань отримуємо підсилення або послаблення підсумкового коливання залежно від співвідношення між фазами цих хвиль. Це явище називають інтерференцією хвиль.

Окремий випадок інтерференції простежуємо під час накладання двох зустрічних хвиль з однаковими частотами й амплітудами. Це можуть бути пряма і відбита хвилі, що поширюються в протилежних напрямках. Тоді в середовищі виникає коливальний процес, який називають стоячою хвилею.

Уявимо собі, що дві плоскі хвилі, однакові за характеристиками, поширюються назустріч одна одній уздовж осі x . Запишемо їхні рівняння:

$$y_1 = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right);$$

$$y_2 = A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x \right).$$

Підсумкове зміщення частинок середовища у площині x описуване таким рівнянням:

$$y = y_1 + y_2 = A \cos \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + A \cos \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (9.2)$$

З тригонометрії відомо, що

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (9.3)$$

На підставі (9.3) перепишемо рівняння (9.2) так:

$$y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (9.4)$$

Цей вираз називають **рівнянням стоячої хвилі**.

Ми одержали цікавий результат: сума двох біжучих хвиль не дала хвильового руху. Отримане рівняння характеризує гармонічне коливання частинок середовища, у якому амплітуда коливань

$$2 \left| A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$$

залежить від координати x . Тут **немає передавання енергії** від одних точок середовища до інших, як це відбувається в біжучій хвилі, немає напрями поширення хвилі. Особливістю стоячої хвилі є те, що коливається не все середовище. У тих місцях, де для координати виконується умова

$$2 \left| A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0,$$

тобто

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

(амплітуда коливань дорівнює нулю), коливань нема. Це точки з координатами

$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}.$$

Відповідні місця називають **вузлами стоячої хвилі**. Відстань між сусідніми вузлами дорівнює $\lambda/2$. Між двома вузлами є точки, що коливаються з найбільшою амплітудою, яка дорівнює $2A$. Це **пучності** (видуги), їхні координати отримаємо за такої умови:

$$\left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 2A,$$

або

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, \quad k=0, 1, 2, 3 \dots$$

Звідси координати пучностей

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}.$$

Отже, відстань між сусідніми пучностями також дорівнює $\lambda/2$. На рис. 9.4 зображено коливальний стан, який стосується стоячої хвилі для деяких послідовних моментів часу:

$$t = 0, \quad t_2 = \frac{T}{8}, \quad t_3 = \frac{T}{4}, \quad t_4 = \frac{3T}{8}, \quad t_5 = \frac{T}{2} \quad \text{і} \quad t_6 = \frac{5T}{8}.$$

Стрілками показано збільшення або зменшення амплітуди у пучностях з плином часу. Для кожного моменту часу видно хвилю, проте ця хвиля не просувається ні праворуч, ні ліворуч, вона стоїть. Лише окремі точки середовища залежно від їхньої координати коливаються з більшою (у пучностях) чи меншою амплітудою.

Енергія елемента об'єму середовища, у якому є стояча хвиля, стала, вона лише перетворюється з одного виду в інший – з кінетичної енергії точок середовища, які проходять положення рівноваги, в

потенціальну енергію у положеннях їхнього максимального відхилення.

В обмеженому середовищі стояча хвиля може утворитися внаслідок накладання прямої і відбитої хвилі. У такому разі *треба, щоб розмір середовища й умови на його границях узгоджувалися з довжиною хвилі λ* , інакше кажучи, частота коливань джерела хвилі повинна збігатися з однією із власних частот коливань обмеженого середовища.

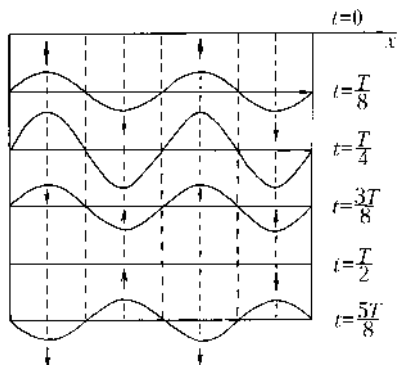


Рис. 9.4. Коливальний стан стоячої хвилі для деяких послідовних моментів часу

Розглянемо, наприклад, вільні коливання стрижня, закріпленого на одному кінці (рис. 9.5). Якщо у такому стрижні збудити коливання, наприклад, ударити молотком у його вільний торець, то стояча хвиля тут утворюється так, що на вільному кінці буде пучність, а на закріпленому – ву-

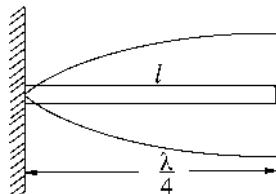
зол. Тому між довжиною стрижня l і довжиною стоячої хвилі λ виконуватиметься таке співвідношення:

$$l = (2m - 1) \frac{\lambda}{4}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Якщо закріпити обидва кінці стрижня (аналогічна ситуація буде у натягнутій струні), то на його кінцях утворяться вузли і тоді зв'язок між l і λ буде такий:

$$l = m \frac{\lambda}{2}.$$

Рис. 9.5. Стояча хвиля в стрижні, закріпленому на одному кінці



Оскільки m набуває низки значень цілих чисел, то це означає, що в стрижні можуть утворюватися стоячі хвилі лише дискретних довжин або, інакше кажучи, дискретних частот. Ці частоти (вищі гармоніки) називають **власними частотами** коливань пружного стрижня.

9.5. Енергія пружної хвилі. Потік енергії

Припустимо, що в пружному середовищі вздовж осі x поширюється поздовжня хвиля:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx). \quad (9.5)$$

Знайдемо енергію, яку переносить ця хвиля. Умовно виділимо у цьому середовищі малий об'єм $\Delta\tau$, такий, щоб усі частинки цього об'єму коливались в одній фазі і щоб їхні швидкості v були однако-ві. Кінетична енергія цього об'єму

$$\Delta W = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2} \Delta\tau,$$

де ρ – густина середовища. З огляду на (9.5) швидкість частинок

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx).$$

Для кінетичної енергії отримуємо вираз

$$\Delta W = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \Delta\tau \sin^2(\omega t - kx).$$

Можна довести, що потенціальна енергія деформації об'єму $\Delta\tau$ у хвильовому процесі дорівнює його кінетичній енергії:

$$\Delta I = \Delta W = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \Delta\tau \sin^2(\omega t - kx).$$

Отже, у випадку плоскої хвилі кінетична і потенціальна енергії кожного малого об'єму пружного середовища однакові. Крім того, вони є періодичними функціями фази хвилі, тобто часу t і координати x . Інакше кажучи, максимум потенціальної енергії, тобто найбільша деформація припадає на ті ділянки середовища, кінетична енер-

гіях яких максимальна. Це характерне для будь-яких біжучих хвиль, бо ця властивість пов'язана лише з механізмом поширення хвиль у пружному середовищі. Принагідно згадаємо, що у стоячій хвилі максимуми кінетичної і потенціальної енергії просторово розділені і зсунуті по фазі.

Повна механічна енергія об'єму $\Delta\tau$ пружного середовища є сумою його кінетичної і потенціальної енергії:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta I = \rho A^2 \omega^2 \Delta\tau \sin^2(\omega t - kx).$$

Отже, повна енергія прямо пропорційна до добутку квадратів амплітуди і циклічної частоти, і є періодичною функцією від часу та координати. Середнє значення повної механічної енергії

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \Delta\tau.$$

(середнє значення квадрата синуса за період дорівнює $1/2$).

Середня густина енергії

$$u = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2.$$

Процес поширення хвиль у пружному середовищі супроводжується перенесенням енергії від джерела хвилі у навколишнє середовище від одних ділянок до інших. Для характеристики процесу перенесення енергії хвилею вводять поняття потоку енергії.

Потік енергії Φ – це кількість енергії, яку переносить хвиля через площину S , перпендикулярну до напрямку поширення хвилі за одиницю часу:

$$\Phi = \frac{\Delta E_c S_{\perp}}{\Delta t} = \frac{\Delta E_c}{\Delta t} S \cos \alpha,$$

де α – кут між напрямом поширення хвилі і нормаллю до площини S .

Потік енергії – величина скалярна.

Уведемо поняття густини потоку енергії $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = u\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \mathbf{v}.$$

Густина потоку енергії J – це така кількість енергії, яку переносить хвиля за одиницю часу через одиничну площину, перпендикулярну до напрямку поширення хвилі.

Величина J – векторна, її називають вектором Умова.

У загальному випадку вираз для потоку енергії через довільну поверхню S записують так:

$$\Phi = \int_S u \mathbf{v} dS = \int_S J dS,$$

або

$$\Phi = \int_S J_n dS,$$

де інтегрувати треба по всій поверхні S .

9.6. Звукові хвилі

Пружні хвилі, які здатна сприймати наша слухова система, називають звуковими хвилями. Людина може сприймати звукові хвилі не лише у повітрі, а й під водою. Людське вухо чутливе до звукових хвиль у діапазоні частот 16–20 000 Гц. Здатність сприймати високочастотні звуки залежить від віку людини. Молода людина може чути звук з частотою до 20 000 Гц, а у середньому віці та ж людина не здатна сприйняти звук вже з частотою 12 000 Гц.

Багато видів тварин і комах здатні сприймати звуки значно вищих частот, ніж людина. Наприклад, у собак верхня межа сприймання звуків сягає 38 кГц. Цю властивість використовують у дресуванні службових собак, користуючись ультразвуковим свистком. У китів межа чутності наближається до 100 кГц.

9.6.1. Об'єктивні характеристики звуку

Є об'єктивні, фізичні характеристики звуку і суб'єктивні, фізіологічні.

Об'єктивна характеристика звуку – **інтенсивність**, або **сила звуку**. Вона чисельно дорівнює середній енергії E , яку переносить звукова хвиля через одиничну площину $S_{\perp}$, перпендикулярну до швидкості звуку, за одиницю часу:

$$I = \frac{E}{S_{\perp} t}.$$

Одиницею вимірювання інтенсивності звуку є ват на метр у квадраті (Вт/м^2). Отже, сила звуку, як об'єктивна характеристика, чисельно дорівнює густині потоку звукової енергії. Її визначають за допомогою приладів, дія яких ґрунтується на вимірюванні звукового (надлишкового) тиску Δp , що визначений різницею між тиском середовища до проходження звуку і тим тиском, який виникає у місцях згущення частинок у процесі поширення звукової хвилі. Між силою звуку I та амплітудою звукового тиску Δp є такий зв'язок:

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{2\rho v},$$

де ρ – густина середовища; v – швидкість звуку. Мінімальну силу звуку, яку ще може сприйняти вухо людини, називають **порогом чутності**. У діапазоні частот 1000–3000 Гц, коли чутливість вуха людини найбільша, поріг чутності $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$.

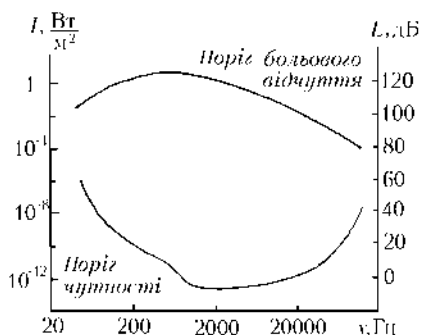


Рис. 9.6. Область чутності людського вуха

Сила звуку, за якої втрачено відчуття звуку і настає болюве відчуття, називають **порогом болювого відчуття**. Цей поріг, так само, як і поріг чутності, залежить від частоти звуку. На рис. 96 зображена залежність порогів чутності й болювого відчуття від частоти звуку.

Область, обмежену цими двома кривими, називають областю чутності.

Досвід засвідчує, що для порівняння акустичних величин зручно користуватися значеннями, що відповідають логарифму відношення шуканих величин, бо їхні значення змінюються в дуже широких межах. Такою характеристикою є **рівень сили звуку**.

Рівень сили звуку L виражають у белах (Б). Один бел – це такий рівень сили звуку, який відповідає зміні сили звуку в 10 разів. Отже, бел дає лише відношення двох сил звуку.

Один бел – це велика одиниця, на практиці, замість бела, користуються одиницею, в 10 разів меншою, – децибелом (дБ). Напри-

клад, підсилення звуку в 20 дБ означає збільшення сили звуку в 100 разів.

Рівень сили звуку L можна виразити через амплітуду звукового тиску Δp за формулою

$$L = 20 \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0},$$

де Δp_0 – амплітуда звукового тиску, який відповідає порогу чутності I_0 . Ефективне значення звукового тиску порогу чутності

$$\Delta p_{o, \text{эф}} = \frac{\Delta p_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{I_0 \rho v} = \sqrt{10^{-12} \cdot 1,29 \cdot 10^3 \cdot 331} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}.$$

9.6.2. Суб'єктивні характеристики звуку

Орган слуху вловлює зв'язок між акустичним збуренням середовища і нашим фізіологічним відчуттям, яке ми характеризуємо гучністю. Сприйнятливість звуків відбувається за логарифмічним законом. Якщо сила звуку збільшується в 1000 разів, то гучність лише у $\lg 1000$, тобто утричі (закон Вебера – Фехнера).

Об'єктивній характеристиці – рівню сили звуку L – відповідає суб'єктивна характеристика – рівень гучності. **Рівень гучності** – це величина, яка чисельно дорівнює рівню сили звуку однаково чутного (суб'єктивно) з ним “еталонного звуку” з частотою 1000 Гц. Виражений у фонах він дорівнює кількості децибел, відрахованих по шкалі еталона, який на слух налаштований на ту саму гучність. Наприклад, гучність звуку має n фонів, якщо рівень його сили звуку дорівнює n дБ при частоті 1000 Гц.

Рівень гучності залежить від сили звуку і чутливості вуха, яка неоднакова не лише у різних людей, а й у конкретної людини для різних частот звуку.

Музикальний звук, крім гучності, характеризують ще висотою тону (частотою коливань) і тембром. Чистий синусоїдний звук називають **простим тоном**. Проте чистий тон отримати важко, завжди до основної частоти, яка визначає висоту тону, приєднуються коливання з частотами, кратними до основної (обертони), які створюють **тембр звуку**. Камертон дає майже чистий тон. Тональні або музикальні звуки мають лінійчасті спектри – це, наприклад, звуки музичних інструментів. Шум морського прибою, шелест листя створюють суцільний спектр.

Одночасне звучання двох або декількох звуків називають акордом. Акорд може викликати приємне слухове відчуття – консонанс, або неприємне – дисонанс.

Швидкість звуку в газі визначають за такою формулою:

$$v = \frac{\gamma RT}{\mu},$$

де R – універсальна газова стала; μ – молярна маса газу; T – температура газу; $\gamma = C_p/C_v$ – відношення молярних теплоємностей газу за сталих тиску й об'єму. Як бачимо, швидкість звуку збільшується з підвищенням температури і не залежить від тиску. У різних шарах земної атмосфери температура, як звичайно, різна, тому шлях звукової хвилі у повітрі викривлений. Уночі температура повітря підвищується з висотою, а вдень – навпаки, знижується. Тому вночі шлях звукової хвилі звернений випуклістю догори (рис. 9.7, а), і чутність більша, ніж удень, коли шлях звукової хвилі звернений випуклістю вниз (рис. 9.7, б).

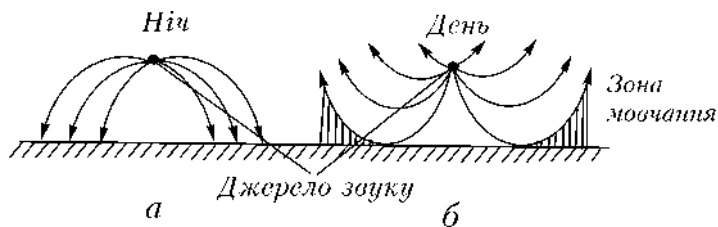


Рис. 9.7. Викривлення шляху звукової хвилі вдень і вночі

Якщо під вечір звук поширюється понад водою, то навіть слабку розмову можна почути за декілька кілометрів. У такому випадку шлях звукової хвилі – це послідовність випуклих дуг (рис. 9.8).



Рис. 9.8. Багаторазове відбивання звуку від поверхні води

Акустику закритих приміщень характеризують часом реверберації – часом, за який інтенсивність звуку зменшується в мільйон разів, тобто на 60 дБ. Цей час залежить від об'єму приміщення і

поглинальної здатності його поверхні. Для доброго приміщення час реверберації $\tau = 0,5\text{--}1,5$ с. У такому приміщенні звуки підсилюються і з приємною для слуху повнотою заповнюють усе приміщення. Якщо час реверберації дуже великий, то різні звуки накладаються один на одний, унаслідок чого мова і музика сприймаються невиразно, якщо ж він надто малий, то звук виходить сухим і тьманим.

9.7. Ультразвук. Кавітація. Застосування ультразвуку

Пружні хвилі частотою понад 20 000 Гц (ультразвукові хвилі) людське вухо не сприймає. Генерують ультразвук спеціальними приладами, дія яких ґрунтується на властивості деяких тіл змінювати свої розміри під дією електричного чи магнітного поля. Наприклад, кристалічна пластинка кварцу, розташована в змінному електричному полі, періодично деформуючись, виконує вимушені коливання, які у випадку резонансу стрімко зростають і за певної частоти у навколишньому середовищі зумовлюють утворення ультразвуку. Ультразвукові хвилі дуже поглинає повітря, у воді їхнє поглинання у 1000 разів менше.

Особливість ультразвукових хвиль та, що за малої довжини λ їх можна формувати у вузькі спрямовані пучки великої інтенсивності на малі ділянки об'єкта. Це дає змогу застосовувати ультразвук для локації предметів, вивчення рельєфу морського дна, виявлення косяків риби, айсбергів тощо. Такий спосіб локації застосовують деякі тварини для орієнтації в просторі (кажани, дельфіни). Велика проникливість ультразвуку в непрозорих металевих виробах (понад 10 м) дає змогу застосовувати їх у дефектоскопії.

Дія ультразвуку різноманітна. Оскільки енергія хвилі прямо пропорційна до квадрата частоти, то це означає, що ультразвук здатний створити амплітуду коливання тиску в десятки і більше атмосфер. Така сильна механічна дія може спричинити низку специфічних явищ, наприклад, **кавітацію**, тобто утворення порожнин (розривів) усередині рідини. У момент коливання, що відповідає максимуму розтягу в рідині, яка перебуває в ультразвуковому полі, відбувається мікроскопічний розрив, куди надходить розчинений у рідині газ і пара, а у момент захоплювання в цих ділянках мікророзриву виникає колосальний тиск – до сотень атмосфер. Рідина починає ніби кипіти за низької температури. Мікророзриви виникають у

тих місцях рідини, де є мікроскопічні газові бульбашки, частинки пилу, іони тощо.

Кавітація може спричинити іонізацію пари і розчинених газів, унаслідок чого в рідині утворюються активні молекули і радикали, і тим самим прискорити хід хімічних реакцій, подрібнення дисперсних частинок і призвести до руйнування поверхні тіл. На засадах кавітації ґрунтується метод застосування ультразвуку для очищення забруднених поверхонь, отримання емульсій, суспензій тощо.

Ультразвук діє і на біологічні об'єкти. За малої інтенсивності він активізує процеси обміну, підвищує активність клітинних мембран, виконує мікомасаж тканин. За великої інтенсивності ультразвук порушує функцію мікроорганізмів і призводить до їхньої загибелі, знищення мікробів. Руйнуючи ультразвуком оболонки рослинних і тваринних клітин, можна отримати з них біологічно активні речовини (ферменти, токсини тощо).

У хірургії ультразвук застосовують для руйнування злоякісних пухлин, розпилювання костей за допомогою пилки, яка виконує ультразвукові коливання. За допомогою фокусувальних систем можна створити ультразвукове зображення досліджуваного об'єкта, яке комп'ютер перетворить у видиме, що широко застосовують у діагностиці для дослідження стану внутрішніх органів людини; у терапії – для лікування ішіасу, ревматизму, емфіземи та інших запальних процесів, для прогрівання на великих глибинах певних ділянок тіла.

9.8. Інфразвук

Інфразвук – це низькочастотні пружні хвилі, які не сприймає людське вухо, хоча вони супроводжують людину в повсякденному житті. Потужними джерелами інфразвуку є грім, артилерійні постріли, вибухи, обвали, шторми, робота машин, міський транспорт.

Тривала дія потужних інфразвуків окремих частот (3–10 Гц) шкодить здоров'ю людини, може спричинити погіршення зору, нервові розлади, резонансні коливання внутрішніх органів, втрату пам'яті тощо.

Інфразвук слабо поглинають речовини, тому він легко проходить крізь перешкоди і може поширюватися на великі відстані. Це дає змогу передбачити наближення стихійної біди – землетрусу, шторму, цунамі. Багато морських тварин і птахів, мабуть, сприймають інфразвук і відпо-

відно реагують на ці явища. Інфразвук використовують у геофізичних розвідках, вивченні фізики моря тощо.

9.9. Ефект Доплера

Ефект Доплера – це явище зміни частоти звукової хвилі, яку реєструє спостерігач, коли джерело звуку і спостерігач рухаються один відносно одного. Таке явище можна спостерігати, коли повз нерухомого спостерігача проходить швидкий потяг і під час руху сигналізує. Спостерігачеві тон звукового гудка здається вищим, коли потяг наближається до нього, і нижчим, коли віддаляється, ніж тоді, коли потяг стоїть.

Розглядаючи цей ефект, треба, перш за все, мати на увазі той факт, що хвиля, яка вийшла від джерела звуку, поширюється у середовищі зовсім незалежно від руху джерела і спостерігача. Тому під час руху відносно середовища (повітря) джерело або спостерігач можуть рухатися за хвилею або проти руху хвилі.

Розглянемо окремі випадки. Припустимо, що в точці A є спостерігач, а в точці B – потяг (рис.9.9).

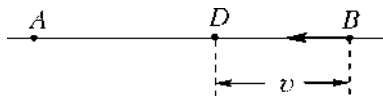


Рис. 9.9. Потяг (точка B) наближається до спостерігача (точка A)

1. Якщо **джерело і спостерігач нерухомі**, і нема вітру, то за 1 с гудок потяга випустить v_0 звукових хвиль, які вклядуться у відрізок BD , що дорівнює швидкості звуку v , тоді довжина хвилі $\lambda = v/v_0$.

2. Якщо **потяг рухається до спостерігача** зі швидкістю $v_{дж}$, то така ж кількість хвиль укладеться вже, очевидно, в менший відрізок $v - v_{дж}$. Це означає, що довжина випущеної хвилі стала меншою і буде не

$$\lambda = \frac{v}{v_0}, \quad \text{а} \quad \lambda' = \frac{v - v_{дж}}{v_0}.$$

Швидкість звуку від руху потяга не залежить, тому частоту звуку, що його сприймає спостерігач, визначимо за звичайною формулою

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = v_0 \frac{v}{v - v_{дж}}.$$

3. Коли спостерігач рухається до джерела звуку по прямій лінії зі швидкістю $v_{\text{сп}}$, то довжина хвилі не зміниться, проте спостерігач за 1 с зареєструє не v_0 хвиль, а більше, і до того ж у стільки разів більше, у скільки відносна швидкість хвиль і спостерігача $v + v_{\text{сп}}$ більша від v . Тому спостерігач почує вищий тон, і v' можна визначити з такої формули:

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{v + v_{\text{сп}}}{v},$$

звідки

$$v' = v_0 \frac{v + v_{\text{сп}}}{v}. \quad (9.6)$$

4. Коли спостерігач віддаляється від джерела звуку, то

$$v' = v_0 \frac{v - v_{\text{сп}}}{v}. \quad (9.7)$$

5. Припустимо тепер, що спостерігач і джерело рухаються один відносно одного, тоді з огляду на формули (9.6) і (9.7) можемо записати для частоти, яку реєструє спостерігач, таку формулу:

$$v = v_0 \frac{v \pm v_{\text{сп}}}{v \mp v_{\text{дж}}}.$$

Якщо напрями швидкостей $v_{\text{сп}}$ і $v_{\text{дж}}$ не збігаються з прямою, яка сполучає приймач і джерело звуку, то замість швидкостей треба брати їхні проекції на напрям цієї прямої.

Контрольні запитання

1. Що називають хвилею?
2. Що таке звук?
3. Що називають силою звуку?
4. Які звукові хвилі Ви знаєте?
5. Що називають порогом чутності?
6. Як пояснити явище кавітації?
7. У чому суть явища Доплера?

Приклади розв'язування задач

9.1. Плоска хвиля поширюється вздовж прямої лінії зі швидкістю 300 м/с. Знайдіть різницю фаз коливань двох точок, що лежать на цій прямій на відстанях, відповідно, $x_1=10$ м, $x_2=16$ м від джерела хвилі. Період коливань $T=0,04$ с.

Розв'язування. Запишемо загальне рівняння плоскої хвилі, яка поширюється вздовж осі Ox :

$$\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Для точки, яка є на відстані $x_1=10$ см, рівняння коливань має вигляд

$$\xi_1 = A \cos \frac{2\pi}{0,04} \left(t - \frac{10}{300} \right),$$

для іншої точки

$$\xi_2 = A \cos \frac{2\pi}{0,04} \left(t - \frac{16}{300} \right).$$

Різниця фаз коливань цих двох точок

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{0,04} \left(\frac{16}{300} - \frac{10}{300} \right) = \frac{2\pi \cdot 6}{0,04 \cdot 300} = \pi.$$

Точки коливаються у протилежних фазах.

9.2. Рівень сили деякого звуку дорівнює 40 дБ. Знайдіть силу звуку й амплітуду звукового тиску. Ефективне значення звукового тиску, що відповідає порогу чутності, $\Delta p_{\text{эф}}=2 \cdot 10^{-5}$ Вт/м².

Розв'язування. За умовою задачі рівень сили звуку

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 40 \text{ дБ}.$$

Силу звуку I шукаємо за формулою

$$\lg \frac{I}{I_0} = \frac{1}{10} L = 4, \quad \text{або} \quad \frac{I}{I_0} = 10^4.$$

Поріг чутності $I_0=10^{-12}$ Вт/м². Для сили звуку маємо

$$I = 10^4 I_0 = 10^4 10^{-12} = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2.$$

Згідно з формулою (10.15) $I \sim (\Delta p)^2$, $I_0 \sim (\Delta p_0)^2$, де Δp і Δp_0 – амплітудні значення звукових тисків, відповідно, цього звуку і звуку, що відповідає порогові чутності. Отже,

$$L = 2 \cdot 10 \cdot \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 40, \quad \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 2, \quad \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 10^2.$$

Однак $\Delta p_0 = \sqrt{2} \Delta p_{\text{эф}}$, і для амплітуди звукового тиску отримуємо вираз

$$\Delta p = \sqrt{2} \Delta p_{\text{эф}} \cdot 10^2 = 1,4 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ Па}.$$

Задачі

9.1. Рівняння незгасальних коливань має вигляд $y = 10 \sin \frac{\pi}{2}$ м. Запишіть рівняння хвилі, якщо швидкість поширення коливань $v=300$ м/с.

$$\text{Відповідь: } y = 10 \sin \left(0,5\pi t - \frac{\pi x}{600} \right) \text{ м}.$$

9.2. Рівняння незгасальних коливань має вигляд $y = \sin 2,5\pi t$ см. Знайдіть зміщення від положення рівноваги, швидкість і прискорення точки, розташованої на відстані 20 см від джерела коливань, у момент часу $t=1$ с після початку коливань. Швидкість поширення коливань 100 м/с.

$$\text{Відповідь: } 0; 7,85 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}; 0.$$

9.3. Яка довжина хвилі, якщо відстань між першою і четвертою пучностями стоячої хвилі дорівнює 15 см?

$$\text{Відповідь: } 0,1 \text{ м}.$$

9.4. Знайдіть силу звуку в повітрі за температури $t=0^\circ\text{C}$, якщо амплітудне значення надлишкового тиску $\Delta p=3,5 \cdot 10^{-3}$ Па. Який рівень сили цього звуку?

$$\text{Відповідь: } 1,43 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2; 41,6 \text{ дБ}.$$

9.5. Два звуки відрізняються за рівнем гучності на 5 фонів. Чому дорівнює відношення інтенсивностей цих звуків?

$$\text{Відповідь: } 3,16.$$

9.6. Два потяги їдуть назустріч з швидкостями $v_1=72$ км/год і $v=54$ км/год. Перший потяг подає гудок частотою $\nu_0=600$ Гц. Визначте частоту звуку, який чує пасажир другого потяга. Швидкість поширення звуку в повітрі $v=340$ м/с.

$$\text{Відповідь: } 660 \text{ Гц}.$$

РОЗДІЛ 9 ПРУЖНІ ХВИЛІ.....	194
9.1. Характеристика хвил.....	194
9.2. Рівняння плоскої хвилі.....	195
9.3. Поширення хвиль у пружному середовищі.....	197
9.4. Стоячі хвилі.....	199
9.5. Енергія пружної хвилі. Потік енергії.....	203
9.6. Звукові хвилі.....	205
9.6.1. Об'єктивні характеристики звуку.....	205
9.6.2. Суб'єктивні характеристики звуку.....	207
9.7. Ультразвук. Кавітація. Застосування ультразвуку.....	209
9.8. Інфразвук.....	210
9.9. Ефект Доплера.....	211
Контрольні запитання.....	212
Приклади розв'язування задач.....	213
Задачі.....	214

Розділ 10

ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Принцип відносності класичної механіки разом з перетвореннями Галілея і поняттям абсолютного часу правильно описує механічні явища, що відбуваються в інерціальних системах за малих швидкостей. Проте він зазнав краху в застосуванні до електромагнітних явищ, теорія яких також обґрунтована Максвеллом. Важливою складовою частиною цієї теорії було поняття ефіру – середовища для поширення електромагнітних хвиль. Проте, на відміну від рівнянь Ньютона, рівняння Максвелла потребували привілейованої системи відліку, пов'язаної з ефіром. Це означає, що основні рівняння електродинаміки не інваріантні щодо перетворень Галілея. Виникла ситуація, ніби між законами механічного руху (які однакові в усіх інерціальних системах відліку) і законами динаміки електромагнітних явищ (які, як виявилось, у цих системах відліку різні) є принципова різниця. Очевидно, прийнятним може бути лише таке твердження, що всі фізичні закони повинні виконуватись однаково в усіх інерціальних системах відліку. Вирішенням цієї, а також інших проблем, була **спеціальна теорія відносності**, яку створив А. Айнштейн 1905 р. Ця теорія узагальнила принципи відносності класичної фізики на всі фізичні явища в інерціальних системах відліку, розширила відомості про простір і час, визначила межі застосування класичної фізики.

10.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

В основі спеціальної теорії відносності є два постулати.

1. *Усі фізичні явища (механічні, електромагнітні та ін.) у будь-яких інерціальних системах відліку за однакових умов відбуваються однаково.*

2. *Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела світла і є однаковою в усіх інерціальних системах відліку.*

Отже, швидкість світла у вакуумі є універсальна стала.

Як бачимо, Айнштайн поширив механічний принцип відносності Галілея на всі фізичні явища. Тому перший постулат відносності можна сформулювати так: *рівняння, які виражають закони природи, є інваріантними відносно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.*

Правильність другого постулату підтверджена у дослідях Майкельсона (1900 р). Учений намагався виявити вплив “ефірного вітру” на швидкість поширення світла в земних умовах, який повинен би рухатися назустріч орбітальній швидкості Землі. Було з’ясовано, що швидкість світла, яке випромінює джерело, розташоване на Землі, однакова, незалежно від того, поширюється світло у напрямі орбітального руху Землі чи в протилежному, і тим самим відкинуто поняття ефіру. Це призвело до того, що звичайний класичний закон додавання швидкостей, коли вони за значенням близькі до швидкості світла, не працював, і перетворення Галілея треба було замінити іншими. Крім того, швидкість світла у вакуумі c виявилась граничною, ніяка дія одного тіла на інше не може поширюватися у просторі зі швидкістю більшою, ніж швидкість світла у вакуумі.

Виняткове становище світлової швидкості спонукало до перегляду одночасності подій, до залежності метрики часу від руху системи відліку. Прикладом цього може бути таке: у центрі вагона, який рухається зі швидкістю v відносно перонного спостерігача, створюється світловий сигнал. Світло досягне передньої і задньої стінки одночасно з погляду спостерігача в вагоні і неодноразовно з погляду перонного спостерігача (для нього передня стінка “тікає” і її доганятиме світло пізніше). У такому разі постає питання про **одночасність подій** у різних системах відліку. Це поняття у класичній фізиці вважали абсолютним. Тут воно стає відносним, тобто час у різних системах відліку минає по-різному.

Будь-яка подія в природі визначена місцем, де вона відбулася, і часом, коли вона відбулася. Отже, у переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої перетворюватися мають не лише три просторові координати x , y , z , а і час t , тобто **простір і**

час взаємопов'язані й утворюють єдиний чотиривимірний простір.

Перетворення системи координат, які треба виконати, щоб правильно описати події у різних інерціальних системах відліку відповідно до вимог спеціальної теорії відносності, виконав **Лоренц**. Якщо система K' рухається зі швидкістю v відносно системи K паралельно до осі x , то для переходу від системи K' до системи K ці перетворення мають такий вигляд:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + v \frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.1)$$

де
$$\beta = \frac{v^2}{c^2}.$$

Для переходу від системи K до K' маємо

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.2)$$

Як бачимо, ці рівняння симетричні і відрізняються лише знаком при v . За малих швидкостей порівняно зі швидкістю світла, тобто коли $\beta \ll 1$, вони переходять у класичні перетворення Галілея.

10.2. Наслідки з перетворень Лоренца

10.2.1. Зменшення довжини тіла

Із рівнянь, які виражають перетворення Лоренца, випливає, що розміри тіла, виміряні спостерігачем, який є в системі координат, що може рухатися відносно цього тіла з різними швидкостями, будуть різні. Нехай у системі відліку K' , яка рухається зі швидкістю v відносно системи K паралельно до осі x , є стрижень, розташований паралельно до осі x (рис. 10.1), його довжина, виміряна у цій системі,

$$L' = x'_2 - x'_1.$$

Зазначимо, що числа x_1' і x_2' не змінюються з часом, бо стрижень у системі K' перебуває у стані спокою. Отже, і різниця $L' = x_2' - x_1'$ не залежить від часу.

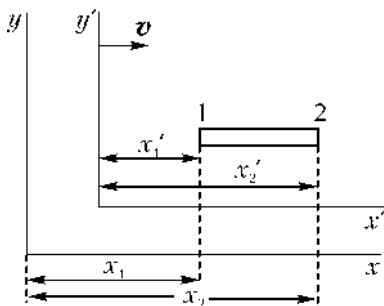


Рис. 10.1. Довжина стрижня, виміряна в системі K' , де він нерухомий, більша від його довжини, виміряної в системі K , щодо якої він рухається

Тепер розглянемо цей самий стрижень з погляду спостерігача, який перебуває у системі відліку K , відносно якої цей стрижень рухається зі швидкістю v . Кінець 1 стрижня у системі відліку K буде мати координату x_1 і число x_1 увесь час змінюватиметься. Число x_2 , яке відповідає положенню кінця 2 стрижня, також змінюється з плином часу. Довжину тіла в системі K визначимо як відстань між точками x_1 і x_2 , які одночасно збігалися з кінцевими точками стрижня. З погляду цього спостерігача довжиною стрижня у системі K буде різниця чисел $x_2 - x_1$, тобто

$$L = x_2 - x_1.$$

Відповідно до формул перетворення Лоренца маємо

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (10.3)$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.4)$$

де t_1 – момент часу, виміряний у системі K , коли спостерігач визначав довжину стрижня, фіксуючи значення координат його кінців. Віднявши (10.3) від (10.4), отримаємо

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

тобто

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

або

$$L = \sqrt{1-\beta^2} L'.$$

Отже,

$$L < L'.$$

Ми доходимо висновку, що *стрижень, який спостерігаємо з координатної системи, відносно якої він рухається, коротший, ніж у системі, де він нерухомий*. Отже, розміри тіла, виміряні спостерігачем, який перебуває в системі координат, що може рухатися відносно цього тіла з різними швидкостями, будуть різними.

Це правило універсальне, воно не залежить від фізичної природи об'єкта і характеризує властивості простору-часу, тобто нема значення, є насправді об'єкт (стрижень) чи його немає на інтервалі між координатами, які ми вимірюємо.

10.2.2. Одночасність подій

На підставі перетворень Лоренца доведемо, що дві події, які відбулися у системі K одночасно, проте в різних точках простору x_1 і x_2 , не є одночасними у системі K' , яка рухається відносно системи K зі швидкістю v . Застосуємо формули Лоренца для перетворення часу:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Якщо $t_1 = t_2$ і $x_1 \neq x_2$, то $t_1' \neq t_2'$, тобто події не одночасні. Отже, **одночасність подій – поняття відносне**. Знак різниці $t_1' - t_2'$ визначений знаком виразу $v(x_1 - x_2)$, а це означає, що в одних системах відліку перша подія може випереджати другу, тоді як в інших – навпаки. Проте це не стосується причинно пов'язаних подій, коли подія-причина завжди випереджає подію-наслідок. Причинно залежний зв'язок зберігається в усіх перетвореннях системи координат тоді, коли швидкість передавання сигналу,

який налагоджує фізичний зв'язок між подіями, не перевищує швидкості світла.

10.2.3. Сповільнення часу

Уявимо собі просту подію, яка відбулася у просторовій точці A у момент часу t_1' . Нехай координати точки A у системі K' будуть x_1' , y_1' , z_1' . Припустимо, що у тій же точці A відбулася ще одна подія, проте в інший момент часу t_2' . Припустимо далі, що ці дві події реєструє спостерігач, який перебуває у системі K' , де точка A нерухома. Назвемо час, виміряний нерухомим у ній годинником, – власним часом. Інтервал часу в системі K' між цими двома подіями

$$\Delta t' = t_2' - t_1'.$$

(Нагадаємо, що спостерігач користується годинником, який нерухомий у системі K').

Розглянемо тепер, як ця пара подій, що відбулася в одній і тій же точці A , виглядає для спостерігача із системи K , відносно якої система K' рухається паралельно до осі x зі швидкістю v . Зрозуміло, що часовий інтервал, який спостерігають у системі K , $\Delta t = t_2 - t_1$, до того ж, просторові координати першої і другої події тепер у системі K згідно з формулами перетворення координати x не будуть сталими, як у системі K' . Проте у часовому інтервалі відповідно до формул Лоренца просторові координати повинні випасти. Справді, застосуємо формулу перетворення часу. Для першої події маємо

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (10.5)$$

для другої –

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.6)$$

Оскільки $x_1' = x_2'$, то координати x_1' і x_2' у часовому інтервалі Δt випадають.

З цих формул стає зрозумілою роль координати x у формулах перетворення часу: вона потрібна для врахування факту синхронізації годинників у системі K з годинниками, що перебувають у стані спокою в системі K' . На швидкість ходу годинників (на значення Δt) вона не впливає.

Відніmemo (10.5) від (10.6):

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

тобто

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10.7)$$

Отже, $\Delta t' < \Delta t$, тобто час, виміряний годинником, нерухомим у цій системі (власний час), є найменший, або інакше: *інтервал часу між двома наступними подіями більший у системі, яка рухається, ніж у тій, що перебуває у стані спокою*. Оскільки для того, щоб зробити часовий інтервал довшим, треба сповільнити хід годинника, то виходить, що *рухомий годинник іде повільніше, ніж нерухомий*. Зрозуміло, що сповільнення ходу годинника помітне лише тоді, коли швидкість системи близька до швидкості світла у вакуумі.

Підтвердженням формули (10.7) є дослід з космічним випромінюванням, у якому на висоті 20–30 км зароджуються нестабільні частинки μ -мезони. З'ясовано, що час їхнього існування (власний час) $T_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Проте ці частинки з великою швидкістю ($v \sim c$) долітають аж до поверхні землі (20 км), що відповідає більшому часові їхнього існування під час руху $T \approx 0,7 \cdot 10^{-4}$ с. Отже, час існування швидких μ -мезонів у багато разів більший від часу їхнього існування у стані спокою T_0 . Це означає, що у системі відліку, пов'язаній з рухомими μ -мезонами, час спливає повільніше.

10.3. Інтервал між подіями

Будь-яку подію характеризують чотирма координатами: x , y , z , t , бо наш світ є світом рухомих подій. У класичній фізиці відс-

тань Δl між двома точками, а також проміжок часу між двома подіями не змінюється під час переходу від одної інерціальної системи відліку до іншої, вони є інваріантами перетворень Галілея. У чотиривимірному просторі Айнштейна, де кожна подія має чотири координати (x, y, z, t) і зображена точкою, просторові й часові інтервали не є інваріантами в перетвореннях Лоренца. Проте спеціальна теорія відносності визначає абсолютний характер інших величин (інтервал, маса-енергія).

Уявимо собі, що якась одна подія відбулась у точці з координатами (x_1, y_1, z_1) у момент часу t_1 , а інша – у точці з координатами (x_2, y_2, z_2) у момент часу t_2 . Тоді можна довести, що вираз

$$\Delta s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]}$$

є інваріантом перетворень Лоренца. Ця величина має однакове значення в усіх інерціальних системах відліку, її називають **інтервалом між подіями**.

Позначимо просторову відстань між двома точками, у яких відбулися події, через Δl , а проміжок часу між ними – Δt . Тоді інтервал між такими подіями Δs можна виразити так:

$$\Delta s = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2}.$$

Проаналізуємо цю формулу. Інтервал між подіями Δs може бути дійсним, уявним або дорівнювати нулю. Оскільки це інваріант, то він повинен бути однаковий у всіх інерціальних системах відліку і може залежати лише від самих подій, а не від системи координат. Розглянемо окремі випадки.

$$1. (\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = 0.$$

Такий інтервал називають **нульовим**. Це означає, що $\Delta s=0$ в усіх інерціальних системах відліку. Звідси випливає, що в усіх інерціальних системах відліку $\Delta l=c\Delta t$, тобто дві події пов'язані між собою сигналом, що поширюється зі швидкістю світла. Крім того, ці події не можуть бути одночасними, бо тоді $\Delta t'=0$, звідки $\Delta s<0$, а це суперечить нашій умові.

$$2. (\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 > 0.$$

Це **часовоподібний інтервал**. За цієї умови завжди можна вибрати таку систему відліку, де дві події відбувалися б в одній

точці простору, тобто коли $\Delta l' = 0$, але не існує такої системи відліку, де ці дві події відбувалися б одночасно, бо тоді $\Delta t'$ повинно б дорівнювати нулю, а це призвело б до того, що інтервал Δs став би уявним, а за нашою умовою $(\Delta s)^2 > 0$. Отже, події, розділені часовоподібним інтервалом, також не можуть бути одночасними, вони можуть відбуватися з одним і тим же тілом.

Отже, як нульовий, так і часовоподібний інтервали стосуються подій, які можуть впливати одна на одну, тобто бути причинно пов'язаними.

$$3. (\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 < 0.$$

Як бачимо, такий інтервал є уявний, його називають **просторовоподібним**. Величина Δs – інваріант, отже, існує така система відліку, у якій $\Delta t' = 0$, тобто дві події будуть відбуватися одночасно у різних просторових точках, але не існує такої системи відліку, у якій ці дві події відбувалися б в одній точці. Такі події завжди розділені одна від одної просторово. Далі з умови $(\Delta s)^2 < 0$ випливає, що $\Delta l > c\Delta t$, а це означає, що такі події не можуть впливати одна на одну, бо сигнал не може поширюватися від однієї точки до іншої зі швидкістю, більшою від швидкості світла у вакуумі. Отже, події, розділені просторовоподібним інтервалом, не можуть бути причинно пов'язаними.

Доходимо такого висновку: якщо події відбуваються з тим самим тілом, то інтервал між тими подіями завжди часовоподібний. Якщо ж інтервал між двома подіями просторовоподібний, то існує така система відліку, у якій ці події відбуваються одночасно.

10.4. Релятивістський закон додавання швидкостей

З перетворень Лоренца випливає новий закон додавання швидкостей. Припустимо, що у системі K тіло рухається зі швидкістю

$$u_x = \frac{dx}{dt},$$

а в системі K' – зі швидкістю

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}$$

З формул (10.4) одержуємо

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{dx'}{dt'} = u_x' = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}.$$

Оскільки

$$\frac{dx}{dt} = u_x,$$

то

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

Якщо $v \ll c$, то отримуємо галілеївський закон додавання швидкостей.

Неважко отримати і зворотний вираз для u через u' :

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

Аналогічно можна знайти ще два співвідношення:

$$u_y = \frac{u_y' + v}{1 + \frac{vu_y'}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u_z' + v}{1 + \frac{vu_z'}{c^2}}.$$

Релятивістський закон додавання швидкостей узгоджується з другим постулатом спеціальної теорії відносності. Справді, якщо припустити, що $u' = c$, то для підсумкової швидкості отримаємо

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c,$$

тобто підсумкова швидкість не може бути більша, ніж швидкість світла у вакуумі c . Можна довести, що під час руху джерела світла змінюється частота світла (ефект Доплера), а не швидкість.

10.5. Релятивістський імпульс

Перший постулат теорії відносності стверджує, що *всі закони природи інваріантні стосовно переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої*. До таких законів належить і закон збереження імпульсу. Щоб його правильно записати в теорії відносності, потрібно вираз для імпульсу $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ замінити іншим виразом. З'ясовано, що другий закон Ньютона буде інваріантний стосовно перетворень Лоренца лише тоді, коли під масою розуміти вираз

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.8)$$

де m_0 – **маса спокою** матеріальної точки, тобто маса, виміряна в тій інерціальній системі відліку, у якій матеріальна точка перебуває у стані спокою, а m – маса точки в системі відліку, відносно якої точка рухається зі швидкістю v . Основний закон динаміки поступального руху збереже свій вигляд, якщо у ньому замість виразу $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ буде релятивістський імпульс

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тоді

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (10.9)$$

Як бачимо, залежність імпульсу від швидкості в теорії відносності складніша, ніж у ньютонівській механіці.

З формули (10.8) для маси випливає, що зі збільшенням швидкості до великих її значень ($v \sim c$) маса матеріальної точки безмірно зростає. Якщо $v = c$, то знаменник формули перетворюється в нуль і, здавалося б, що $m = \infty$. Щоб цього не було, треба припустити, що маса спокою частинки, яка рухається зі швидкістю світла, наприклад, фотона, повинна дорівнювати нулю. Ніяке тіло зі скінченною масою не може досягти швидкості світла у вакуумі. Отже, *швидкість матеріального тіла не може зрівнятися зі швидкістю світла у вакуумі чи перевершити її*.

Є експериментальні докази релятивістського збільшення маси частинок під час їхнього руху в прискорювачах елементарних частинок.

Якщо $v \ll c$, то релятивістський вираз для імпульсу переходить у ньютонівський вираз: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

10.6. Релятивістська кінетична енергія

У релятивістській механіці сила

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

не є інваріантною величиною, як у класичній. Це означає, що, записуючи рівняння руху, треба диференціювати за часом не лише швидкість, а й масу тіла, яка змінюється зі зміною швидкості. Звідси випливає, що енергія тіла зі збільшенням швидкості збільшується швидше, ніж у класичній механіці. Проте зміна кінетичної енергії завжди зумовлена роботою сили, яка діє на тіло.

Щоб вивести формулу для релятивістської кінетичної енергії, визначимо роботу, яку повинна виконати сила, щоб збільшити швидкість тіла від нуля до кінцевого значення швидкості v . Припустимо, що сила і зміщення мають однаковий напрям. Робота сили завжди дорівнює приросту кінетичної енергії тіла:

$$dW = Fds.$$

Проте

$$F = d(mv)/dt.$$

Тому

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dm}{dt} v^2 + mv \frac{dv}{dt} = v^2 \frac{dm}{dt} + \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt},$$

або

$$dW = v^2 dm + \frac{m}{2} d(v^2).$$

Вилучимо з цього рівняння змінну v , спираючись на формулу для маси тіла:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2},$$

звідси

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2} \right); \quad d(v^2) = m_0^2 c^2 \frac{2dm}{m^3}.$$

Це дає змогу записати вираз dW так:

$$\begin{aligned} dW &= c^2 \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2} \right) dm + m_0^2 c^2 \frac{dm}{m^2} = \\ &= c^2 dm - c^2 \frac{m_0^2}{m^2} dm + c^2 \frac{m_0^2}{m^2} dm = c^2 dm. \end{aligned}$$

Отже,

$$dW = c^2 dm.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$W = c^2 m + \text{const},$$

або

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \text{const}.$$

Константу визначимо з умови, що кінетична енергія тіла повинна дорівнювати нулю, коли його швидкість $v=0$. Звідси випливає, що $\text{const} = -m_0 c^2$, і, відповідно, для W отримуємо формулу

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (10.10)$$

Хоча формулу (10.10) ми вивели для випадку, коли сила діє у напрямі переміщення, вона справджується і для загального випадку.

Формула (10.10) переходить у класичну формулу кінетичної енергії, якщо вважати, що $v \ll c$. Справді, за умови, що $v^2/c^2 \ll 1$, розклавши в ряд вираз $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, знаходимо

$$W = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right).$$

Знехтувавши членами вищого порядку, одержимо

$$W = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Маємо класичний вираз для кінетичної енергії рухомого тіла.

10.7. Повна енергія тіла й енергія спокою

Закони збереження повинні бути інваріантними стосовно перетворень Лоренца. Як свідчать експериментальні дослідження з елементарними частинками, закон збереження енергії буде інваріантним лише у тому разі, якщо припустити, що вільна частинка, крім кінетичної енергії, має ще додаткову енергію:

$$E_0 = m_0 c^2,$$

яку називають *енергією спокою*, або власною енергією. Величину E , яка дорівнює сумі кінетичної енергії тіла і його енергії спокою, називають *повною енергією тіла*:

$$E = W + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отже, для повної енергії тіла E маємо формулу

$$E = mc^2. \quad (10.11)$$

Як бачимо, повна енергія тіла в теорії відносності завжди додатна, на відміну від класичної механіки, де вона може бути як додатна, так і від'ємна. Зазначимо, що повна енергія в спеціальній теорії відносності не охоплює потенціальної енергії.

Вираз (10.11) називають формулою Айнштейна, вона виражає зв'язок між масою й енергією, тобто те, що з *будь-якою масою тіла пов'язана енергія*. Це один з найважливіших наслідків спеціальної теорії відносності, він дає змогу глибше зрозуміти закон збереження енергії, який тепер перетворюється в загальніший закон збереження енергії і маси.

Закон взаємозв'язку маси й енергії підтверджують численні експерименти з виділенням енергії в ядерних реакціях, він має практичне застосування на атомних електростанціях.

Контрольні запитання

1. Які передумови спеціальної теорії відносності?
2. Яке формулювання постулатів Айнштейна?
3. Що означає відносність довжин і часу?
4. Яка формула для релятивістського імпульсу?
5. Як пояснити поняття повної енергії тіла в спеціальній теорії відносності?
6. Що є інваріантом у спеціальній теорії відносності?

Приклади розв'язування задач

10.1. Під час руху деякої частинки її поздовжні розміри зменшились на 10%. Яка швидкість частинки?

Розв'язування. Поздовжні розміри частинки L_0 у нерухомій відносно частинки і L у рухомій системах відліку пов'язані між собою формулою

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1)$$

де v – швидкість частинки. За умовою задачі

$$\frac{L_0 - L}{L_0} = 1 - \frac{L}{L_0} = 0,1.$$

Звідси

$$\frac{L}{L_0} = 0,9, \quad \text{тобто} \quad L = 0,9L_0.$$

З огляду на (1) отримаємо

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,9, \quad \text{або} \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = (0,9)^2 = 0,81 \quad \text{і} \quad v^2 = 0,19 c^2,$$

$$v = \sqrt{0,19 c^2} = 0,44 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,32 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

10.2. Швидкість електрона збільшилася від $v_1 = 0,98 c$ до $v_2 = 0,99 c$. Знайдіть зміну кінетичної енергії електрона.

Розв'язування. Відповідно до формули (10.10) зміна кінетичної енергії електрона

$$\begin{aligned} \Delta W = W_2 - W_1 &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta W &= 9,11 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0,98^2}} \right) = \\ &= 81,99 \cdot 10^{-15} (7,1 - 5,0) = 1,7 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Задачі

10.1. Довжина стрижня, виміряна в системі, у якій він нерухомий, дорівнює 1 м. З якою швидкістю повинен рухатися вздовж стрижня спостерігач, щоб у нього довжина стрижня була 0,999 м?

Відповідь: 0,45 c .

10.2. Маятник коливається з періодом 2 с. Який буде період коливань цього маятника, виміряний спостерігачем, що рухається відносно маятника зі швидкістю 0,80 с?

Відповідь: 3,33 с.

10.3. Відстань від зірки до Землі дорівнює 10^5 світлових років. Якщо прийняти, що тривалість життя людини 70 років, то з якою швидкістю людина повинна летіти до зірки, щоб ще за життя добратися до неї?

Відповідь: 0,975 с.

10.4. Знайдіть імпульс електрона, який летить зі швидкістю 0,980 с.

Відповідь: $1,34 \cdot 10^{-21}$ кгм/с.

10.5. Яку роботу треба виконати, щоб електрон прискорити зі стану спокою до швидкості 4000 м/с?

Відповідь: $7,28 \cdot 10^{-24}$ Дж.

РОЗДІЛ 10 ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ	
ВІДНОСНОС	215
10.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца	215
10.2. Наслідки з перетворень Лоренца	217
10.2.1. Зменшення довжини тіла	217
10.2.2. Одночасність подій	219
10.2.3. Сповільнення часу	220
10.3. Інтервал між подіями	221
10.4. Релятивістський закон додавання швидкостей	223
10.5. Релятивістський імпульс	225
10.6. Релятивістська кінетична енергія	226
10.7. Повна енергія тіла й енергія спокою	228
Контрольні запитання	229
Приклади розв'язування задач	230
Задачі	232

ЧАСТИНА II

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

Розділ 11 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

Молекулярна фізика – це наука про властивості речовин і процеси, що відбуваються з ними з погляду молекулярної будови речовини. Вона тісно пов'язана з фізичною хімією, біофізикою та іншими природничими науками.

Є два головні методи дослідження в молекулярній фізиці: *молекулярно-кінетичний та термодинамічний*, які трактують явища з різних позицій, доповнюючи один одного.

11.1. Молекулярно-кінетичний і термодинамічний методи опису явищ природи

Молекулярно-кінетичний метод стосується досліджень великої кількості молекул і ґрунтується на використанні теорії ймовірностей і математичної статистики. Це дає змогу пояснити деякі фізичні явища і властивості тіл за допомогою законів поведінку системи молекул як великої сукупності об'єктів, що підпорядковані закону випадкових подій і які за певних умов виявляють чіткі закономірності. Великій сукупності молекул властиві нові, статистичні закономірності, які втрачають силу, коли кількість частинок мала. До того ж, нові властивості кількісно і якісно зумовлені середніми значеннями величин, що характеризують кожну окрему молекулу. Такий метод дає змогу пов'язати макропараметри системи з мікрохарактеристиками молекул, його найчастіше застосовують у вивченні нерівноважних станів.

Термодинамічний метод полягає у вивченні властивостей макросистем на підставі їхньої характеристики за допомогою макропараметрів, які описують властивості тіла в цілому, не вдаючись у деталі їхньої молекулярної структури. Це феноменологічна (описова) теорія, яку застосовують для дослідження передавання теплоти від однієї системи до іншої та її перетворення в роботу. В її основі є декілька принципів, визначених шляхом узагальнення великої кількості дослідних даних. Вона не спирається на атомну чи молекулярну будову речовини, тобто не пов'язана з молекулярно-кінетичною інтерпретацією явищ.

Кожен з цих методів не дублює, а радше доповнює один одного, трактуючи явища молекулярної фізики з різних поглядів.

11.2. Термодинамічні параметри. Стан системи

Об'єктом досліджень термодинаміки є **термодинамічна система** – будь-яке макроскопічне тіло або сукупність тіл, що обмінюються тепловою енергією. Стан термодинамічної системи визначають числовими значеннями деяких змінних величин, які характеризують її, їх називають **параметрами** системи. Найпоширенішими параметрами є температура T , тиск P , об'єм V , густина ρ та ін. Змінюючи параметри системи, її переводять з одного стану в інший. Якщо деякі параметри мають різні значення у різних точках системи, то стан такої системи нерівноважний. Стан термодинамічної системи **рівноважний**, коли кожен з її параметрів (тиск, температура, густина) всюди має те саме значення, яке не змінюється з часом без будь-якого зовнішнього впливу. Ізольована нерівноважна система завжди за певний проміжок часу, так званий час релаксації, переходить у рівноважний стан. Досягнувши його, система сама собою з нього вже не виходить. На діаграмі в системі координат (P, V) рівноважний стан системи зображають точкою (наприклад, точка A на рис. 11.1).

Поряд з параметрами для характеристики стану системи вводять інші величини, які змінюються під час переходу системи з одного стану в інший, тобто вони є функціями стану (функціями P, V, T). Найважливіші функції стану термодинамічних систем – внутрішня енергія й ентропія.

Термодинамічним процесом називають перехід термодинамічної системи з одного стану в інший унаслідок зміни умов,

які приводять до зміни параметрів P , V , T . Якщо перехід відбувається швидко, то рівноважний стан системи порушується, і що швидше змінюються умови, то більші збурення відбуваються у системі. Такий перехід не можна зобразити кривою лінією на діаграмі в системі координат (P, V) .

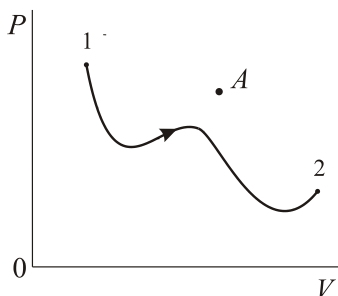


Рис. 11.1. Рівноважний термодинамічний процес зображають лінією

системі. Такий перехід не можна зобразити кривою лінією на діаграмі в системі координат (P, V) .

Рівноважний процес – це послідовність рівноважних станів, тобто нескінченно повільних процесів, які на графіку зображають кривою лінією (рис. 11.1). Це ідеалізація процесу, всі реальні процеси відбуваються за конечний інтервал часу.

11.3. Оцінка мас і розмірів молекул

Кожна речовина складається з найдрібніших частинок – молекул і атомів, які перебувають у невинному хаотичному тепловому русі, інтенсивність якого посилюється з підвищенням температури. У твердих тілах цей рух виявляється в коливаннях атомів біля положень рівноваги.

Підтвердженням існування теплового руху молекул у рідині є **броунівський рух**, який полягає в тому, що мікроскопічні частинки, завислі в рідині, виконують безладний рух, який не змінюється з часом. Цей безладний рух мікроскопічних частинок можна спостерігати під мікроскопом. Причиною такої поведінки мікроскопічних частинок є безперервні некомпенсовані хаотичні удари молекул рідини до цих частинок, унаслідок чого вони рухаються хаотично.

Для молекулярної та атомної характеристики речовини введено поняття атомної чи молекулярної маси. Одиницею вимірювання маси атомів і молекул є особлива так звана вуглецева одиниця – атомна одиниця маси ($\text{a.o.m.} = 1,660531 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$), яка дорівнює $1/12$ маси атома вуглецю C^{12} . Масу атома, виражену у вуглецевих одиницях, називають атомною масою, а масу молеку-

ли – молекулярною масою, її позначають μ . Кількість речовини в грамах, яка чисельно дорівнює молекулярній масі, називають моєм (наприклад, 1 моль кисню дорівнює 32 г), 1000 молів = 1 кіломоль (кмоль).

З хімії відомо, що 1 моль будь-якої речовини містить однакову кількість молекул, яка дорівнює числу Авогадро $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Оскільки 1 моль речовини – це маса всіх N_A молекул, що містяться в одному молі, то $\mu = N_A m$, де m – маса однієї молекули. Її можна знайти з такого співвідношення: $m = \mu / N_A$. Ця величина близько $10^{-26} - 10^{-27}$ кг.

Оцінимо розміри молекул. Досвід свідчить, що стисливість рідин і кристалів дуже мала. Це означає, що в таких тілах маємо щільну упаковку молекул чи атомів. Використаємо це для визначення розмірів молекул. Нехай ρ – густина речовини, μ – її молярна маса, тоді $V_\mu = \mu / \rho$ – об'єм одного кілограм-моля речовини. Поділивши його на число Авогадро, отримаємо об'єм однієї молекули:

$$V = \frac{V_\mu}{N_A} = \frac{\mu}{\rho N_A}.$$

Діаметр молекули – це величина, пропорційна до кореня кубічного з об'єму, тому

$$d \approx \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Для більшості хімічно простих речовин отримуємо саме таке число, для органічних – числа інші.

У фізиці та хімії часто використовують поняття ефективного діаметра молекул, він різний навіть для атомів однієї речовини і залежить від виду взаємодії, у якій бере участь цей атом, від кратності його валентного зв'язку тощо.

11.4. Ідеальний газ

У теоретичних дослідженнях багатьох процесів замість реальних складних систем часто розглядають їхні ідеалізовані моделі. У такому разі нехтують несуттєвими характеристиками цього явища і беруть до уваги лише основні. У молекулярній фізиці моделлю реального газу є ідеальний газ, тобто така система частинок, коли нехтують їхніми розмірами порівняно з відстанню між ними і їхньою взає-

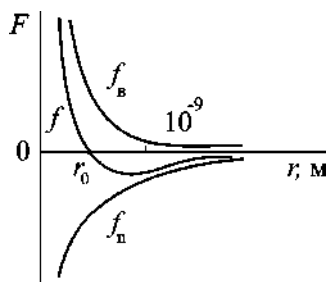


Рис. 11.2. Залежність сил притягання і відштовхування від відстані між молекулами

модією, зводячи її до пружних ударів. Обґрунтуємо правильність такої моделі.

У реальному газі взаємодія молекул зводиться до притягання і відштовхування. Сили відштовхування діють на дуже малих відстанях порівнянно з розмірами молекул і стрімкіше зменшуються зі збільшенням відстані між ними, ніж сили притягання, бо лише за таких умов молекулярні сили можуть

зрівноважуватися. Тоді молекули перебувають у стійкій рівновазі, утворюючи тверде тіло. Експериментальні й теоретичні дослідження засвідчили, що міжмолекулярні сили взаємодії залежать від відстані за законом $F \sim 1/r^n$, де $n = 7$ для сил притягання і $n = 9$ для сил відштовхування. На рис. 11.2 зображено характер залежності сили відштовхування f_v , сили притягання f_p і підсумкової сили f від відстані між молекулами r . Відстань r_0 відповідає рівновазі, тому тут підсумкова сила f дорівнює нулю.

Коли відстань між молекулами $r < r_0$, то електронні оболонки молекул починають перекриватися, сили відштовхування стрімко збільшуються, тому відстань $d \sim 10^{-10}$ м приймають за діаметр молекул. Якщо $r \sim 10^{-9}$ м, то молекули переважно притягаються, а на відстані $r > 10^{-9}$ м, тобто понад 10 атомних діаметрів, практично вже не взаємодіють між собою. Саме такою є середня відстань між молекулами в газі за нормальних умов.

Час притягання між молекулами дуже короткий, час відштовхування ще коротший, а час невзаємодії між молекулами, коли вони перебувають на великих відстанях, порівняно великий. Отже, можна вважати, що взаємодія між молекулами зводиться до пружного удару. Оскільки час взаємодії дуже малий, то й потенціальну енергію взаємодії між молекулами можна прийняти такою, що дорівнює нулю. Тоді загальна енергія молекул газу до—

рівнюватиме сумі їхніх кінетичних енергій хаотичного теплового руху.

Отже, **ідеальним газом** називають газ, у якого:

- 1) розмірами молекул нехтуємо;
- 2) молекули вільно рухаються, а взаємодія між ними зводиться до абсолютно пружного удару;
- 3) внутрішня енергія газу є сумою кінетичних енергій усіх його молекул.

Реальний газ задовольняє такі умови за малого тиску і не дуже низької температури.

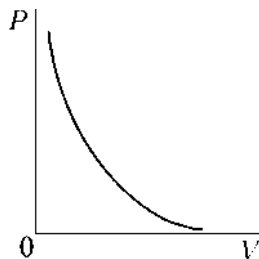
11.5. Закони ідеального газу

Під час експериментального дослідження поведінки газів у рівноважних процесах ще до появи молекулярно-кінетичної теорії визначено основні закони, що стосуються ідеального газу.

1. Закон **Бойля–Маріотта**. Він характеризує процес, який відбувається за сталої температури (ізотермічний процес): *для деякої маси газу за сталої температури добуток тиску газу на його об'єм є сталим, тобто*

$$PV = \text{const.} \quad (11.1)$$

Графічно цей закон зображають одною гілкою гіперболи, що лежить у першій чверті, оскільки тиск і об'єм можуть бути лише додатними. Цю криву називають ізотермою ідеального газу (рис. 11.3).



2. Закон Гей–Люссака.

А. Для процесу, що відбувається за сталого тиску (ізобарний процес), його формулюють так: *за сталого тиску*

об'єм певної маси газу лінійно змінюється з температурою:

$$V = V_0(1 + \alpha t). \quad (11.2)$$

Рис. 11.3. Графічне зображення закону Бойля–Маріотта

Б. Якщо процес відбувається за сталого об'єму (ізохорний процес), то маємо таке формулювання: *за сталого об'єму тиск деякої маси газу лінійно залежить від його температури:*

$$P = P_0(1 + \alpha t). \quad (11.3)$$

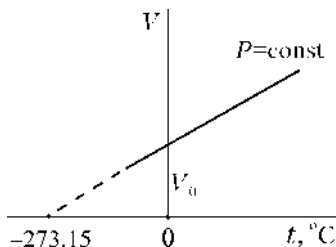


Рис. 11.4. Графік залежності об'єму газу від температури

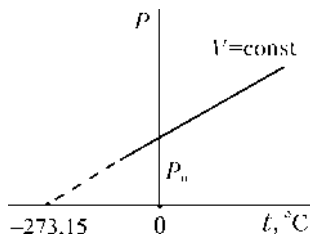


Рис. 11.5 Тиск газу лінійно залежить від температури

Тут V_0 і P_0 – об'єм і тиск газу за температури 0°C ; α – стала величина: $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$; t – температура за шкалою Цельсія.

Із закону (11.2) формально випливає таке: незалежно від того, який об'єм займав газ за температури 0°C , під час зниження температури до $-273,15^\circ\text{C}$ його об'єм буде дорівнювати нулю. Це, однак, суперечить нашим уявленням про молекули, об'єм яких не може зменшитися до нуля. Отже, цей закон за низьких температур не дійсний, що на графіку рис. 11.4 зображено штриховою лінією.

Ізохорний процес графічно зображають прямою лінією, яку називають ізохорою, вона перетинає вісь температур у точці $-273,15^\circ\text{C}$ (рис.11.5). Це означає, що тиск газу за такої температури повинен дорівнювати нулю. У 1852 р. Кельвін пояснив цей висновок тим, що за такої низької температури припиняється поступально-хаотичний рух молекул газу, а температуру $-273,15^\circ\text{C}$ назвав **абсолютним нулем температури**, або 0 K (точно 0 K відповідає температурі $-273,16^\circ\text{C}$). За температури абсолютного нуля всі речовини (крім гелію за звичайного тиску) переходять у кристалічний стан. Доведено, що досягти абсолютного нуля не можна ніякими засобами.

Температуру, відраховану від абсолютного нуля, називають **абсолютною**, або термодинамічною, температурою і позначають

T. Реперними точками абсолютної температури є абсолютний нуль і потрійна точка води, за якої лід, вода і водяна пара перебувають у термодинамічній рівновазі. Відстань між цими точками ділять на 273,16 частин, які називають *кельвінами*. Абсолютну температуру *T* пов'язують з температурою *t* за шкалою Цельсія таким співвідношенням:

$$T = (t + 273,15)K.$$

У шкалі **Цельсія** за нульову температуру приймають температуру замерзання води за атмосферного тиску.

11.6. Рівняння стану ідеального газу

У стані термодинамічної рівноваги параметри системи *P*, *V*, *T* не можуть мати довільних значень, а повинні бути пов'язані між собою характерним співвідношенням, яке називають рівнянням стану. Термодинамічні системи характеризують різними рівняннями стану, вигляд яких у більшості випадків нам невідомий.

Вигляд рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона–Менделєєва) вивести порівняно просто. Для цього подумки переведемо деяку масу ідеального газу зі стану 1 з параметрами *P*₁, *V*₁, *T*₁ у стан 2 з параметрами *P*₂, *V*₂, *T*₂, застосувавши послідовно закони Гей–Люссака і Бойля–Маріотта.

Нехай деяка маса *M* ідеального газу займає об'єм *V*₁ під тиском *P*₁ за температури *T*₁, тобто перебуває в першому стані. Застосувавши закон Гей–Люссака (11.2) переведемо цей газ ізобарно у проміжний стан з параметрами *V*₂', *P*₁, *T*₂. Цей процес опише рівняння

$$\frac{V_1}{V_2'} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (11.4)$$

Тепер будемо ізотермічно за температури *T*₂ стискати газ до об'єму *V*₂ і тиску *P*₂. Газ перейде у другий стан з параметрами *V*₂, *P*₂, *T*₂. Такий перехід опише рівняння Бойля–Маріотта, а саме:

$$V_2' P_1 = V_2 P_2. \quad (11.5)$$

Для одержання рівняння, яке описувало б процес переходу відразу з першого стану в другий з одночасною зміною всіх трьох параметрів, вилучимо величину *V*₂', характерну для проміжного

стану, підставивши її значення з виразу (11.4) у рівняння (11.5). Унаслідок цього одержимо

$$\frac{V_1 P_1}{V_2 P_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

або

$$\frac{V_1 P_1}{T_1} = \frac{V_2 P_2}{T_2}. \quad (11.6)$$

Рівняння (11.6) уперше вивів Клапейрон 1834 р., воно виражає **об'єднаний закон** газового стану: *для деякої маси газу відношення добутку тиску на об'єм газу до абсолютної температури є сталим.*

Застосуємо тепер до цього газу **закон Авогадро**, за яким 1 моль будь-якого газу за однакових тиску і температури займає однаковий молярний об'єм V_μ . З цього закону випливає, що

$$\frac{PV_\mu}{T} = \text{const},$$

і рівняння Клапейрона для 1 моля будь-якого газу набуває вигляду

$$PV_\mu = RT, \quad (11.7)$$

де R – константа, яку називають **універсальною газовою сталою**. Її можна визначити з рівняння (11.7) за нормальних умов:

$$R = \frac{PV_\mu}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273,15} = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}.$$

Об'єм V довільної маси газу M виразимо через його молярний об'єм V_μ :

$$V = \frac{M}{\mu} V_\mu.$$

Тоді рівняння (11.7) буде виглядати так:

$$PV = \frac{M}{\mu} RT.$$

Рівняння (11.8) для довільної маси ідеального газу вперше у такому вигляді записав Менделєєв 1875 р. Це і є рівняння стану ідеального газу, яке називають **рівнянням Клапейрона–Менделєєва**.

Контрольні запитання

1. У чому полягає різниця між молекулярно-кінетичним і термодинамічним методами опису явищ природи?
2. Які величини характеризують стан термодинамічної системи?
3. Який стан термодинамічної системи називають рівноважним?
4. Що таке ідеальний газ?
5. Яке рівняння Клапейрона–Менделєєва?

Приклади розв'язування задач

11.1. Яка маса газу міститься в балоні об'ємом $V=1 \text{ м}^3$ під тиском $P=8,9 \cdot 10^4 \text{ Па}$ за температури $t=27^\circ\text{C}$?

Розв'язування. Застосуємо рівняння стану Клапейрона–Менделєєва в універсальній формі

$$PV = \frac{M}{\mu} RT.$$

З цього рівняння

$$M = \frac{PV\mu}{RT}, \text{ де } T = (t + 273)K = 300K.$$

Підставимо числові значення:

$$M = \frac{8,9 \cdot 10^4 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300} = 1 \text{ кг}.$$

11.2. Який об'єм займає одна молекула води, якщо маса молекули води $m=2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$?

Розв'язування. Будемо вважати, що молекули води щільно упаковані, тоді для густини води можемо записати

$$\rho = \frac{m}{V},$$

а для об'єму молекули води отримуємо

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2,99 \cdot 10^{-26}}{1000} = 2,99 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Задачі

11.1. Під яким тиском перебуває кисень масою 1 кг в об'ємі $V=1 \text{ м}^3$ за температури $t=47^\circ\text{C}$?

Відповідь: $8,3 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

11.2. Знайдіть масу вуглекислого газу CO_2 , що міститься в об'ємі $V=25$ л під тиском $P=100$ Па за температури $t=27^\circ\text{C}$.

Відповідь: 44 г.

11.3. Яка кількість газу міститься в балоні об'ємом 10 м^3 під тиском 150 кПа за температури $t=47^\circ\text{C}$?

Відповідь: 0,56 кмоль.

11.4. В об'ємі $V=10$ л міститься маса $M_1=12$ г вуглекислого газу і маса $M_2=10$ г азоту за температури $t=127^\circ\text{C}$. Знайдіть тиск суміші в посудині.

Відповідь: 209 Па.

11.5. Яка кількість частинок міститься в масі $M=16$ г кисню, ступінь дисоціації якого $\alpha=0,5$.

Відповідь: $4,5 \cdot 10^{23}$.

Розділ 12

КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ

У тих випадках, коли потрібно знайти співвідношення, які пов'язували б макроскопічні параметри термодинамічної системи з мікроскопічними величинами, що характеризують тепловий рух молекул, а також для розгляду кінетичних явищ застосовують молекулярно-кінетичну теорію. На її підставі шукають і функцію розподілу молекул за швидкостями, нею також користуються під час розгляду явищ перенесення. Як приклад застосування цієї теорії виведемо основне рівняння кінетичної теорії газів і розглянемо низку інших питань.

12.1. Основне рівняння кінетичної теорії газів

Молекули газу, який міститься в посудині, внаслідок теплового руху вдаряються до стінок посудини і, змінюючи напрям руху, передають стінці деякий імпульс. Сумарний імпульс, який отримує стінка від ударів усіх молекул за 1 с дорівнює силі, з якою молекули діють на стінку. Визначивши цю силу, можна знайти тиск, з яким газ діє на стінку. Будемо ґрунтуватися на тому, що для опису руху молекул застосовні закони механіки Ньютона.

Розглянемо ідеальний газ, який міститься в посудині у формі куба, розташованого на початку координат так, що його ребра l паралельні до осей координат (рис. 12.1). Припустимо, що в газі є N молекул одного типу. Під час пружного удару молекули в стінку змінюється лише нормальна складова v_{ix} її швидкості, а тангенціальна складова v_{it} зберігається, тобто на молекулу під час удару не діють сили вздовж стінки (рис. 12.2). Тому достатньо розглядати лише x -компоненту швидкості i -ї молекули, яка летить до стінки куба, розташованої перпендикулярно до осі x .

Зміна імпульсу молекули під час удару

$$-(mv_{ix}) - (mv_{ix}) = -2mv_{ix},$$

де m – маса молекули; v_{ix} – x -складова швидкості i -ї молекули. За третім законом Ньютона стінка отримує імпульс $2mv_{ix}$. Підрахуємо кількість ударів однієї молекули за час Δt . Ударившись об стінку, молекула летить до протилежної стінки, відбивається від неї і повертається назад. Інтервал часу між двома послідовними ударами молекули в одну й ту ж стінку

$$\tau = \frac{2l}{v_{ix}}.$$

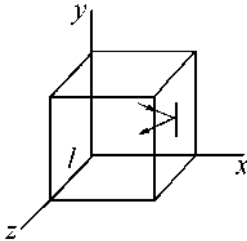


Рис. 12.1. Обчислення кількості ударів молекули об стінку

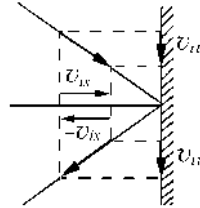


Рис. 12.2. Абсолютно пружний удар молекули об стінку

Величина, обернена до τ , дорівнює кількості ударів молекули в стінку за 1 с:

$$z = \frac{1}{\tau} = \frac{v_{ix}}{2l}.$$

Кількість ударів i -ї молекули в стінку за час Δt буде $\frac{v_{ix}}{2l} \Delta t$.

Імпульс, який отримує стінка внаслідок ударів i -ї молекули упродовж часу Δt

$$2mv_{ix} \frac{v_{ix}}{2l} \Delta t = \frac{mv_{ix}^2}{l} \Delta t.$$

Сумарний імпульс, який отримує стінка від N молекул за інтервал часу Δt

$$\Delta K_x = \frac{m\Delta t}{l} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2.$$

Аналогічні вирази отримаємо для стінок, перпендикулярних до осей y і z :

$$\Delta K_y = \frac{m\Delta t}{l} \sum_{i=1}^N v_{iy}^2, \quad \Delta K_z = \frac{m\Delta t}{l} \sum_{i=1}^N v_{iz}^2.$$

За другим законом Ньютона зміна імпульсу за одиницю часу дорівнює силі:

$$\frac{\Delta K_x}{\Delta t} = F_x; \quad \frac{\Delta K_y}{\Delta t} = F_y; \quad \frac{\Delta K_z}{\Delta t} = F_z.$$

Це усереднена сила, вона зумовлена ударами багатьох молекул до стінки. Тиск – це відношення сили до площі, на яку діє сила:

$$P_x = \frac{F_x}{l^2}; \quad P_y = \frac{F_y}{l^2}; \quad P_z = \frac{F_z}{l^2}.$$

Отже, тиски на відповідні стінки будуть такі:

$$P_x = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2;$$

$$P_y = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^N v_{iy}^2;$$

$$P_z = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^N v_{iz}^2.$$

Якщо газ перебуває у рівноважному стані, то тиск на всі стінки куба повинен бути однаковий, тобто повинна виконуватись умова:

$$P_x = P_y = P_z = P,$$

бо у хаотичному русі напрями руху молекул уздовж будь-якої осі фізично рівноправні. Додавши вирази для P_x , P_y , P_z , отримаємо

$$3P = \frac{m}{l^3} \sum_{i=1}^N v_i^2. \quad (12.1)$$

Тут

$$v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2.$$

Суму квадратів швидкостей у формулі (12.1) замінимо середнім арифметичним квадратів швидкостей, увівши поняття середньої квадратичної швидкості $v_{\text{кв}}$:

$$v_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 .$$

Підставимо цей вираз у формулу (12.1):

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{l^3} m v_{\text{кв}}^2 = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle \varepsilon \rangle ,$$

де

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2}$$

– середня енергія теплового руху, що припадає на одну молекулу газу.

Отже, маємо такий зв'язок макропараметра P з мікропараметром – середньою кінетичною енергією хаотичного руху молекул:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle , \quad (12.2)$$

де $n = N/V$ – концентрація молекул у газі.

Можна довести, що наш результат придатний не лише для газу в об'ємі куба, а й для газу в будь-якій посудині.

Вираз (12.2) є **основним рівнянням кінетичної теорії газів**. *Тиск газу, зумовлений ударами молекул до стінки в їхньому хаотичному русі, дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії теплового руху молекул, які містяться в одиниці об'єму газу.*

Основне рівняння кінетичної теорії газів – одне з головних рівнянь молекулярної фізики. Воно дає змогу знайти зв'язок макроскопічного параметра газу (його тиску) з мікроскопічними характеристиками молекул (їхньою енергією теплового руху), з нього, як наслідки, можна отримати всі рівняння ідеального газу.

12.2. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів

Основне рівняння кінетичної теорії газів дає змогу відшукати зв'язок іншого макропараметра системи – температури – з середньою кінетичною енергією хаотичного поступального руху молекул ідеального газу. Для цього

теоретично отримане рівняння (12.2) застосуємо до 1 моля ідеального газу і перепишемо його так:

$$PV_{\mu} = \frac{2}{3} N_A < \varepsilon >. \quad (12.3)$$

З іншого боку, маємо рівняння стану ідеального газу для 1 моля, яке описує макроскопічні властивості газу:

$$PV_{\mu} = RT. \quad (12.4)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (12.3) і (12.4):

$$\frac{2}{3} N_A < \varepsilon > = RT.$$

Уведемо коефіцієнт k , який називають сталою Больцмана; він виражає співвідношення між одиницею енергії джоулем і одиницею температури – кельвіном, тобто відображає, яка частка джоуля міститься в одному кельвіні:

$$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}.$$

Тоді

$$< \varepsilon > = \frac{3}{2} kT. \quad (12.5)$$

На підставі рівняння (12.5) можемо дати таке означення температури. **Температура** є мірою середньої кінетичної енергії хаотичного поступального руху молекул газу.

Таке означення температури стосується лише середніх і високих температур, бо середня енергія молекул, взагалі кажучи, є складною функцією температури і за низьких температур, коли настає так зване виродження газу і виявляються квантові ефекти, енергію не можна характеризувати поняттям абсолютної температури. Навіть за температури $T = 0 \text{ К}$ у тілі існує так званий нульовий рух атомів (див. параграф 18.4).

Поняття температури, як бачимо, є статистичним, воно стосується великої кількості молекул, що рухаються хаотично. Не можна говорити про температуру у якійсь точці вакууму, де нема молекул, або у молекулярному пучку, де маємо напрямлений рух молекул.

Згідно з формулою (12.5), середня кінетична енергія теплового руху молекул не залежить від маси молекул, тому за довільної заданої температури молекули всіх газів мають одну і ту ж середню енергію теплового руху, але різні середні квадратичні швидкості.

Для середньої квадратичної швидкості теплового руху молекул газу з формули (12.5) отримаємо вираз

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (12.6)$$

Середня квадратична швидкість є однією з характеристик теплового руху всієї сукупності молекул.

Замінімо у рівнянні стану ідеального газу універсальну газову сталу R на сталу Больцмана k й одержимо такий вираз для тиску:

$$P = \frac{RT}{V_0} = \frac{kN_A T}{V_0} = nkT, \\ P = nkT. \quad (12.7)$$

Рівняння (12.7) пов'язує тиск з концентрацією молекул у газі і його температурою, воно є іншим видом рівняння стану ідеального газу.

12.3. Ступені вільності молекул

Молекула, як система матеріальних точок, має певне число ступенів вільності i . Нагадаємо, що числом ступенів вільності називають кількість незалежних координат, які визначають положення тіла в просторі. Три ступені вільності визначають розташування центра мас системи, інші – рух атомів усередині системи. Максимальне число ступенів вільності в системі з N атомів дорівнює $3N$. Проте взаємодія між атомами, тобто їхній зв'язок між собою зменшує це число. Наприклад, двоатомна лінійна молекула з жорстким зв'язком між атомами (N_2 , O_2) має п'ять ступенів вільності, три ступені характеризують поступальний рух молекули, два – обертальний:

$$i = 3_{\text{пост}} + 2_{\text{оберт}} = 5.$$

Обертання навколо осі, що сполучає центри атомів, не простежується. У трьохатомної молекули з жорстким зв'язком є шість ступенів вільності:

$$i = 3_{\text{пост}} + 3_{\text{оберт}} = 6.$$

Трьохатомна молекула з пружним зв'язком між атомами має більше число ступенів вільності, воно дорівнює сумі чисел ступенів вільності гармонічних (нормальних) коливань і поступальних та обертальних рухів. Кожному нормальному коливанню відповідає один ступінь вільності.

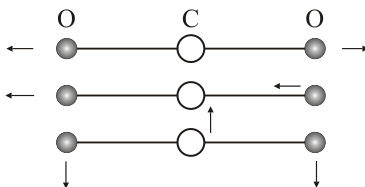
Розглянемо види коливань молекули вуглекислого газу CO_2 з пружним зв'язком між атомами. Структура молекули лінійна. У рівновазі обидва атоми кисню розташовані симетрично стосовно атома вуглецю. Тут можливі такі види коливань (рис. 12.3):

а) лінійні, валентні коливання атомів кисню, коли вони розходяться або сходяться по лінії, що сполучає їхні центри (антифазні коливання);

б) одночасне зміщення обидвох атомів кисню ліворуч або праворуч від центра (синфазні коливання);

в) згин молекули у напрямі, перпендикулярному до лінії зв'язку між атомами у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Рис. 12.3. Види коливань молекули CO_2



Отже, коливальний рух молекули CO_2 характеризують чотири нормальні коливання, що відповідають чотирьом ступеням вільності. Обертання молекули CO_2 можливе лише навколо двох взаємно перпендикулярних до лінії з'єднання атомів осей, що відповідає ще двом обертальним ступеням вільності. Загальне число ступенів вільності реальної молекули CO_2

$$i = 3_{\text{пост}} + 2_{\text{оберт}} + 4_{\text{колив}} = 9.$$

У загальному випадку виділення можливих нормальних коливань реальних молекул є складним завданням.

12.4. Розподіл енергії за ступенями вільності молекул

Середня енергія хаотичного руху молекули ідеального газу

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Молекули ідеального газу одноатомні, вони рухаються лише поступально і мають три ступені вільності. На один ступінь вільності таких молекул припадає середнє значення енергії $1/2 \cdot kT$.

У статистичній фізиці доведено що загалом на один ступінь вільності будь-якої молекули у разі теплової рівноваги системи за температури T припадає середня енергія теплового руху $1/2 \cdot kT$. Якщо у молекулі можливі коливальні рухи її складових частинок, то, як відомо, середнє значення потенціальної енергії коливального руху частинки дорівнює середньому значенню її кінетичної енергії: $1/2 kT$. Це означає, що разом на один ступінь коливального руху припадає повна енергія $2 \cdot 1/2 kT = kT$. Крім того, з обертальним рухом молекули також пов'язують певний запас енергії.

Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності формулюють так: *на кожний ступінь вільності довільної системи, яка перебуває у тепловій рівновазі за температури T , припадає середня енергія теплового хаотичного руху $1/2 \cdot kT$.*

Цей результат справджується не лише для газів. Больцман довів, що цей закон загальний і його можна застосовувати до багатьох систем, які перебувають у термодинамічній рівновазі, у тому числі до твердого тіла.

Отже, середня енергія теплового руху молекул будь-якої речовини визначена такою формулою:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT.$$

Цей закон має обмежене застосування; за низьких температур, коли суттєвими стають квантові ефекти, він не діє.

12.5. Функція розподілу молекул за швидкостями (Максвелла)

Молекули газу перебувають у стані постійного хаотичного руху, вони мають різні швидкості, які безупинно змінюються як за

модулем, так і за напрямом. У стані термодинамічної рівноваги усталюється певне співвідношення між кількістю молекул з малими, середніми і великими швидкостями. Зрозуміло, що кількість молекул, які мають малі швидкості і дуже великі, – незначна. Інакше це означало б, що під час кожного зіткнення молекула лише втрачає енергію або набуває, що малоймовірно. Найбільше буде молекул з середніми швидкостями. У такому стані розподіл молекул за напрямом є ізотропний, тобто всі напрями швидкостей однаково ймовірні, а модулі швидкостей різні в широкому інтервалі значень.

Аналітичний вираз для функції розподілу молекул за швидкостями вивів Максвелл. Ця функція стосується газу, який перебуває у термодинамічній рівновазі. Нею послуговуються у статистичних методах дослідження, коли виникає потреба знайти відносну кількість молекул, які мали б швидкості у межах наперед заданого інтервалу $[v, v + \Delta v]$. Знайдемо цю функцію.

Спочатку дамо означення самої функції розподілу молекул за швидкостями. Нехай у посудині є N молекул однорідного газу. Застосуємо такий метод. Відкладемо на осі x значення модулів швидкостей v всіх молекул газу. Розділимо вісь абсцис на невеликі інтервали Δv . Тоді кількість молекул ΔN , які потраплять у якийсь інтервал Δv , буде прямо пропорційна до ширини цього інтервалу:

$$\Delta N \sim \Delta v,$$

і кількості всіх молекул у посудині:

$$\Delta N \sim N.$$

Крім того, ΔN залежатиме від місця розташування інтервалу Δv на осі x , тобто від модуля швидкостей, бо кількість молекул, що припадають на однакові інтервали Δv , але стосуються різних інтервалів, буде різною, як, наприклад, неоднакова кількість людей мають зріст від 170 до 175 см і від 190 до 195 см, хоча розміри інтервалів в обох випадках однакові. Отже,

$$\Delta N = F(v)N\Delta v.$$

Величина

$$\frac{\Delta N}{N} = F(v)\Delta v$$

визначає відносну кількість молекул, швидкості яких є в інтервалі швидкостей $[v, v + \Delta v]$, і відображає залежність цієї кількості від швидкості молекул v . Функцію

$$F(v) = \frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta v} \quad (12.8)$$

називають **функцією розподілу молекул** за швидкостями. Пояснимо її зміст. Якщо $\Delta v = 1$, то $F(v) = \Delta N/N$. Це означає, що $F(v)$ дорівнює відносній кількості молекул, швидкості яких припадають на одиничний інтервал швидкостей біля значення швидкості v . Перейдемо до границі й перепишемо формулу (12.8):

$$F(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}.$$

Тоді можна сказати так: функція розподілу $F(v)$ дорівнює ймовірності того, що кількість молекул dN/N потрапляє в одиничний інтервал швидкостей біля значення швидкості v . Функцію $F(v)$ ще називають густиною ймовірності.

Шукаємо аналітичний вираз функції розподілу $F(v)$. Для цього скористаємося поняттям про уявний простір швидкостей (фазовий простір), у якому вздовж прямокутних координатних осей будемо відкладати компоненти швидкостей v_x, v_y, v_z окремих молекул. У такому фазовому просторі швидкість кожної молекули

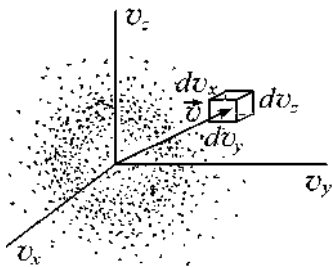


Рис.12.4. Система координат і фазові точки у фазовому просторі швидкостей

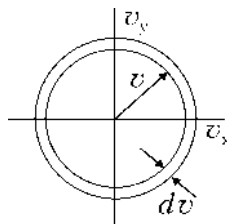
буде відображена довжиною відрізка від початку системи координат до фазової точки (рис.12.4).

Не виконуючи теоретичних обчислень, наведемо готовий вираз для густини фазових точок:

$$\frac{dN_{v_x, v_y, v_z}}{dv_x dv_y dv_z} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Розподіл швидкостей молекул за напрямками ізотропний; тому щоб відшукати розподіл молекул за їхнім модулем, тобто знайти кількість молекул, модулі яких є в інтервалі від v до $v+dv$ незалежно від напрямів їхнього руху, зробимо так: виділимо навколо початку координат у фазовому просторі сферичний шар радіусом v і товщиною dv (рис. 12.5).

Рис. 12.5. Визначення функції розподілу Максвелла



Модулі швидкостей молекул, фазові точки яких містяться у цьому сферичному шарі, є в інтервалі значень від v до $v+dv$. Кількість таких молекул dN_v дорівнює добутку густини фазових точок на об'єм сферичного шару $4\pi v^2 dv$, тобто

$$dN_v = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv.$$

Поділимо останній вираз на Ndv й отримаємо **функцію розподілу Максвелла**

$$F(v) = \frac{dN_v}{Ndv} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (12.9)$$

Як видно з формули (12.9), функція розподілу Максвелла залежить від температури газу, маси частинок і їхньої швидкості. За малих швидкостей у формулі (12.9) переважає член v^2 , а за середніх і великих – експонента $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$, тому графік функції $F(v)$ має вигляд, зображений на рис. 12.6. Заштриховану під кривою

$F(v)$ площу можна інтерпретувати так. Вона пропорційна до відносної кількості молекул n/dn , які містяться в одиниці об'єму газу і швидкості яких є в інтервалі швидкостей $[v, v+dv]$. Справді,

$$dS = F(v)dv = \frac{dn}{ndv} dv = \frac{dn}{n},$$

де n – концентрація молекул.

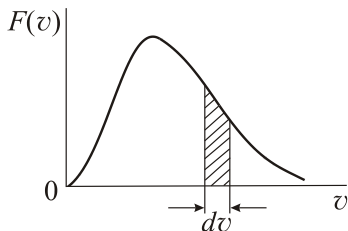


Рис. 12.6. Заштрихована під кривою розподілу площа пропорційна до відносної кількості молекул в одиниці об'єму, швидкості яких є в заданому інтервалі швидкостей

Найімовірніша швидкість хаотичного руху молекул відповідає максимуму функції розподілу. Щоб її знайти, треба взяти похідну від $F(v)$ і прирівняти її до нуля. Розв'язавши це рівняння, одержимо

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Формула Максвелла також дає змогу визначити середню арифметичну і середню квадратичну швидкості молекул. Для середньої квадратичної швидкості вже маємо вираз (12.6).

Формула для середньої арифметичної швидкості виглядає так:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Отже, хаотичний рух молекул характеризують трьома різними значеннями: найімовірнішою, середньою арифметичною і середньою квадратичною швидкостями. Найбільшою є середня квадратична, найменшою – найімовірніша швидкість (рис. 12.7).

З підвищенням температури газу зменшується кількість молекул, що мають малі швидкості, і збільшується кількість тих, які мають великі швидкості (рис. 12.8). Це виявляється в тому, що

максимум кривої розподілу зсувається в бік великих швидкостей і опускається вниз, проте так, що площа під кривою, яка характеризує загальну кількість молекул, є сталою.

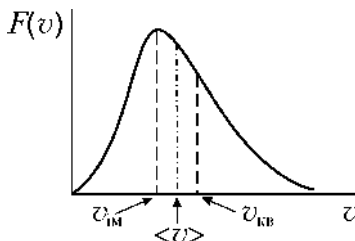


Рис. 12.7. Розподіл Максвелла і характерні швидкості молекул

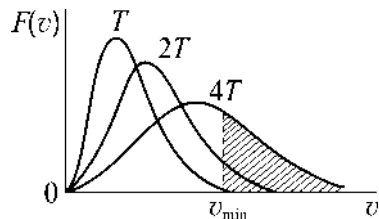


Рис. 12.8. Розподіл Максвелла для трьох різних температур

Залежність функції Максвелла від маси частинок газу зводиться до того, що за однакових параметрів газу n і T загальна форма кривої розподілу незмінна, лише відносна кількість молекул з великими швидкостями більша у тому газі, маса молекул якого менша. За однакових умов середні швидкості молекул водню значно більші, ніж в інших газах. Наприклад, за нормальних умов середня швидкість молекул водню (~ 1600 м/с) у чотири рази більша від середньої швидкості молекул кисню (~ 400 м/с).

Для зручності в користуванні формулі Максвелла можна надати інший вигляд, якщо ввести відносну швидкість молекул $u = v/v_{ім}$. Тоді отримаємо формулу

$$dn_u = n \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \quad (12.10)$$

де dn_u – кількість молекул в одиниці об'єму, відносні швидкості яких є в межах від u до $u+du$.

Функцію розподілу Максвелла можна записати й для відносної енергії теплового руху молекул E :

$$dn_E = nA'e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE,$$

де dn_E – кількість молекул в одиниці об'єму газу, енергія теплового руху яких є в межах $[E, E+dE]$.

12.6. Вплив температури на перебіг хімічної реакції у газовій суміші

Розглянемо хімічну реакцію між молекулами газової суміші, яку для перебігу реакції потрібно нагрівати (ендотермічна реакція). Тут енергію для реакції молекули отримують завдяки зменшенню кінетичної енергії свого теплового руху, що повинна бути не меншою від порогової енергії реакції. Нехай мінімальна швидкість молекул, яка відповідає пороговій енергії реакції, – $v_{\min}$. Кількість молекул, швидкості яких більші від $v_{\min}$, характеризує площа “хвоста” під кривою функції розподілу Максвелла (заштрихована площа, на рис. 12.8). Припустимо, температура газової суміші T така, що площа “хвоста” кривої Максвелла становить усього 0,05% від загальної площі під кривою. Обчислення свідчать про таке: якщо температуру суміші підвищити удвічі, то площа під такою кривою дорівнюватиме вже 3%, а якщо у чотири, то це співвідношення збільшиться до 22%. Звідси бачимо, що частка молекул, які можуть брати участь у хімічній реакції, стрімко збільшується з підвищенням температури суміші.

З підвищенням температури суміші зростає і кількість зіткнень між молекулами, однак не набагато, бо кількість зіткнень молекул за 1 с збільшується пропорційно до $\sqrt{T}$ (див. параграф 12.10).

12.7. Дослід Штерна

З огляду на важливе значення, яке має функція розподілу Максвелла у фізиці, важливим є питання про її експериментальне підтвердження. Було виконано багато таких експериментів, розглянемо один з них. У скляній вакуумній посудині циліндричної форми по її геометричній осі протягнута платинова дротина D , покрита тонким шаром срібла (рис. 12.9). Дротина оточена металевим екраном E зі щілиною вздовж твірної. Під час нагрівання дротини атоми срібла з різними швидкостями випаровуються з її поверхні, і щілина формує їх у широкий тонкий пучок. У вакуумі, без зіткнень з іншими молекулами, вони потрапляють на скляну стінку приладу і залишають на ній чіткий паралельний до осі циліндра вузький слід P . Якщо весь прилад

обертати навколо його осі, то атоми пучка перебуватимуть в обертальній системі, і на них діятиме сила інерції Коріоліса, яка, діючи перпендикулярно до швидкості атомів, перенеситиме їх в інші точки на стінці приладу: ми отримаємо зсунутий відносно першого розмитий слід C , за зміною товщини якого можна характеризувати залежність функції розподілу від швидкості молекул.

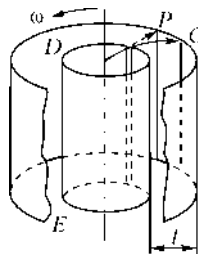


Рис. 12.9. Схема приладу у досліді Штерна

Це дає змогу експериментально перевірити закон розподілу атомів за швидкостями, який, як виявилося, справді максвеллівський.

Недолік цього експерименту той, що рух молекул напрямлений, а не хаотичний, як у газі.

12.8. Барометрична формула

Молекули атмосферного повітря перебувають у тепловому хаотичному русі, на який впливає поле тяжіння Землі. Внаслідок цього вони розподіляються в просторі так, що їхня концентрація, а отже, і тиск, зменшується з висотою. Виведемо формулу, яка б описувала залежність тиску атмосферного повітря від висоти.

Зробимо такі спрощення. Будемо вважати, що: по-перше, прискорення вільного падіння g по всій висоті однакове ($g = \text{const}$); по-друге, температура повітря з висотою не змінюється ($T = \text{const}$); по-третє, повітря атмосфери є ідеальним газом.

Атмосферний тиск чисельно дорівнює вазі стовпа повітря площею основи 1 м^2 і висотою від землі до межі атмосфери. Зміна тиску на dP між двома рівнями висоти на dh дорівнює вазі стовпа повітря, розміщеного між цими двома рівнями, з площею поперечного перерізу, що дорівнює одиниці, тобто вазі повітря

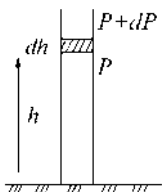


Рис. 12.10. Прирости тиску і висоти мають різні знаки, бо атмосферний тиск з висотою знижується

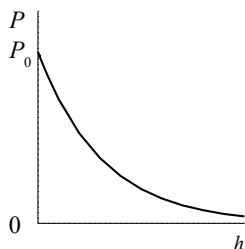


Рис. 12.11. Зі збільшенням висоти атмосферний тиск знижується за експоненціальним законом

елементарного об'єму $d\tau = 1\text{м}^2 dh$ (рис. 12.10)

$$dP = -\rho g dh, \quad (12.11)$$

де ρ – густина повітря. Знак мінус у формулі означає, що зі збільшенням висоти h тиск знижується. Густина повітря визначимо з рівняння стану ідеального газу

$$PV = \frac{M}{\mu} RT.$$

Оскільки

$$\rho = \frac{M}{V},$$

то

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Підставимо значення ρ у рівняння (12.11):

$$dP = -\frac{P\mu}{RT} g dh.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh.$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо

$$\ln P = -\frac{\mu g}{RT} h + C.$$

Сталу інтегрування C знайдемо з граничних умов. Якщо $h=0$, то $P=P_0$, тобто $C=\ln P_0$. Отже,

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h}. \quad (12.12)$$

Формулу (12.12) називають **барометричною формулою**. Як бачимо, атмосферний тиск зі збільшенням висоти знижується за експоненціальним законом (рис. 12.11). Проте досліди з супутниками Землі засвідчили, що густина атмосфери на великих висотах значно більша, ніж це випливає з барометричної формули. Це пояснюють неоднорідністю складу і нерегулярною зміною температури реальної атмосфери на різних висотах.

12.9. Розподіл Больцмана

Цей розподіл стосується частинок, які перебувають у силовому потенціальному полі.

Розглянемо газ, на який діє поле тяжіння Землі. Запишемо барометричну формулу (12.12)

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h}.$$

Помножимо і поділимо дріб показника експоненти на число Авогадро N_A :

$$P = P_0 e^{-\frac{N_A \mu g}{N_A RT} h} = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

де

$$m = \frac{\mu}{N_A}, \quad k = \frac{R}{N_A}.$$

Отже,

$$P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (12.12, a)$$

У чисельнику показника експоненти маємо потенціальну енергію частинки в полі тяжіння Землі, а в знаменнику – енергію теплового руху частинки. Це означає, що молекули намагатимуться осідати на землю (мінімум потенціальної енергії), а тепловий рух перешкоджатиме цьому, унаслідок чого молекули повітря залежно від їхньої енергії теплового руху перебуватимуть на певній висоті над поверхнею землі.

Перейдемо від тиску газу P до його концентрації n за відомою формулою

$$P = nkT.$$

Формула (12.12, а) перетвориться в таку:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Можемо зробити узагальнення: якщо частинки перебувають у будь-якому потенціальному полі, то кількість частинок n , потенціальна енергія яких дорівнює Π ,

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}, \quad (12.13)$$

де n_0 – кількість частинок з енергією $\Pi=0$. З формули (12.13) бачимо: якщо частинки перебувають у потенціальному полі, то чим більша потенціальна енергія частинок, тим менша їхня кількість. Формула (12.13) відображає **розподіл Больцмана частинок** за енергією.

Статистику Больцмана або, інакше кажучи, класичну статистику можна застосовувати до багатьох складних систем (молекул, атомів, іонів), проте їй не підлягають електрони в металах, нуклони у ядрі (статистика Фермі–Дірака), молекули ізотопу гелію He^4_2 (статистика Бозе–Айнштейна).

12.10. Вільний пробіг молекул

Під час зіткнення двох молекул їхні центри перебувають на відстані, що дорівнює ефективному діаметру цих молекул. Очевидно, що ефективний діаметр d залежить від швидкості молекул, а отже, від температури. Що більша швидкість молекул, то менше d .

Імовірність взаємодії (зіткнення) молекул характеризує ефективний поперечний переріз взаємодії σ , який залежить від виду взаємодії. Його визначають за такою формулою:

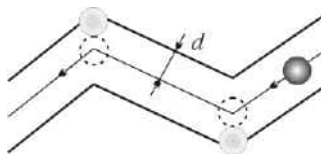
$$\sigma = \pi d^2.$$

Хоча у формулі є ефективний діаметр, проте ефективний поперечний переріз немає нічого спільного з геометричними розмірами молекули.

Середню відстань, яку проходить молекула від зіткнення до зіткнення, називають **середнім вільним пробігом молекули l** . Очевидно, що середній вільний пробіг молекул повинен бути пов'язаний з ефективним поперечним перерізом σ . Знайдемо цей зв'язок. Спочатку визначимо кількість зіткнень однієї молекули з іншими під час її хаотичного руху за 1 с. Припустимо, що ця молекула рухається по ламаному шляху, а всі інші нерухомі. Шлях, який проходить молекула за 1 с, чисельно дорівнює швидкості молекули v . За шляхом цієї молекули нарисуємо ламаний циліндр (рис. 12.12) довжиною, що чисельно дорівнює середній швидкості молекули $\langle v \rangle$ радіусом d . Об'єм циліндра

$$\tau = \pi d^2 \langle v \rangle = \sigma \langle v \rangle.$$

Рис. 12.12. Обчислення середнього вільного пробігу молекул



Під час руху за одиницю часу ця молекула зіткнеться з усіма іншими, які містяться усередині цього циліндра. Кількість її зіткнень ν з іншими молекулами дорівнюватиме кількості цих молекул у циліндрі, тобто добуткові об'єму циліндра на концентрацію молекул n :

$$\nu = \pi d^2 \langle v \rangle n.$$

Якщо врахувати рух інших молекул, то замість швидкості v у цій формулі повинна бути відносна швидкість

$$\langle v_{\text{відн}} \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

тому для кількості зіткнень ν за 1 с одержуємо вираз

$$\nu = \sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle n.$$

Середній вільний пробіг молекули дорівнює відношенню всього шляху, пройденого молекулою за 1 с, до кількості зіткнень за 1 с, тобто

$$l = \frac{\langle v \rangle}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

Отже, для середнього вільного пробігу отримуємо формулу

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n} \quad (12.14)$$

З неї випливає, що *середній вільний пробіг молекул l обернено пропорційний до концентрації молекул, а отже, і до тиску*. За нормального тиску $l = 2 \cdot 10^{-7}$ м, якщо $P = 1,33$ Па, то $l = 0,1$ м, а коли $P = 10^{-4}$ Па, то $l = 1$ м.

Гази, у яких середній вільний пробіг молекул теоретично більший від лінійних розмірів посудини, у якій міститься газ, тобто коли молекули у хаотичному русі не стикаються між собою, а лише зі стінками посудини, називають ультрарозрідженими (вакуумом). Властивості таких газів відрізняються від властивостей газу за нормальних умов.

Контрольні запитання

1. Чому основне рівняння кінетичної теорії газів так називають?
2. Яке означення температури?
3. Звідки випливає, що поняття температури є статистичним?
4. Яка середня енергія припадає на один ступінь вільності системи?
5. У чому виявляється залежність функції розподілу Максвелла від температури?
6. За яким законом знижується атмосферний тиск зі збільшенням висоти?
7. У чому суть закону розподілу Больцмана?
8. Який зв'язок між ефективним поперечним перерізом і довжиною вільного пробігу молекул?

Приклади розв'язування задач

12.1. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу $v_{\text{кв}} = 500$ м/с, тиск $P = 60$ кПа. Знайдіть густину газу.

Розв'язування. Із закону Клапейрона–Менделєєва для густини газу маємо

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{P\mu}{RT}.$$

З іншого боку,

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Отже,

$$\frac{RT}{\mu} = \frac{1}{3} v_{\text{кв}}^2.$$

Підставимо цей вираз у формулу для ρ , й отримаємо

$$\rho = \frac{3P}{v_{\text{кв}}^2} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^4}{(500)^2} = 0,72 \text{ кг/м}^3.$$

12.2. Яка частка молекул азоту за температури $t=17^\circ\text{C}$ має швидкості в межах від 580 до 590 м/с?

Розв'язування. Скористаємося формулою Максвелла у вигляді (12.11):

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u. \quad (1)$$

Шукаємо найімовірнішу швидкість

$$v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 290}{28}} = 415 \text{ м/с}.$$

Відносна швидкість $u = \frac{v}{v_{\text{ім}}} = \frac{580}{415} = 1,4$; $u^2 = 1,96$; $e^{-u^2} = 0,14$;

$$\Delta u = \frac{10}{415} = 2,4 \cdot 10^{-2}.$$

Підставляємо у формулу (1)

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{3,14}} \cdot 0,14 \cdot 1,96 \cdot 2,4 \cdot 10^{-2} = 15,2 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{\Delta n}{n} = 1,5\%.$$

12.3. Яка середня довжина вільного пробігу молекул вуглекислого газу, що перебуває під тиском $P=10$ Па, і температура якого $t=50^\circ\text{C}$? Ефективний діаметр молекул вуглекислого газу $d=0,32$ нм.

Розв'язування. Середню довжину вільного пробігу молекул визначаємо за формулою

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму. З формули $P = nkT$ для n маємо $n = P/kT$. Підставимо цей вираз у формулу для l і отримаємо

$$l = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3,14 (0,39 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 10} = 935 \text{ мкм.}$$

Задачі

12.1. Густина газу, який перебуває під тиском $P=100$ кПа і температура якого $t=17^\circ\text{C}$, становить $\rho=0,082$ кг/м³. Яка середня квадратична швидкість молекул цього газу?

Відповідь: 1,9 км/с.

12.2. Середня квадратична швидкість молекул газу, що міститься в балоні об'ємом $V=30$ л, $v=10^3$ м/с, кінетична енергія поступального руху його молекул $W=7$ кДж. Знайдіть масу газу і тиск, під яким він перебуває.

Відповідь: $M=14$ г, $P=156$ кПа.

12.3. Кисень масою $M=100$ г перебуває при температурі $t=47^\circ\text{C}$. Чому дорівнює енергія обертального руху його молекул?

Відповідь: 8,31 кДж.

12.4. На якій висоті тиск повітря удвічі менший від тиску на рівні моря? Температура повітря $T=273$ К.

Відповідь: 5,5 км.

12.5. Знайдіть середню кількість зіткнень за одиницю часу молекул кисню при температурі $t=47^\circ\text{C}$, якщо середня довжина вільного пробігу $l=920$ мкм.

Відповідь: $5 \cdot 10^5$ с⁻¹.

ЧАСТИНА II.....	232
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА.....	232
Розділ 11 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ	232
11.1. Молекулярно-кінетичний і термодинамічний методи опису явищ природи.....	232
11.2. Термодинамічні параметри. Стан системи	233
11.3. Оцінка мас і розмірів молекул.....	234
11.4. Ідеальний газ	235
11.5. Закони ідеального газу	237
11.6. Рівняння стану ідеального газу	239
Контрольні запитання	241
Приклади розв'язування задач	241
Задачі.....	241
Розділ 12 КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ	243
12.1. Основне рівняння кінетичної теорії газів.....	243
12.2. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів.....	246
12.3. Ступені вільності молекул.....	248
12.4. Розподіл енергії за ступенями вільності молекул	250
12.5. Функція розподілу молекул за швидкостями (Максвелла).	250
12.6. Вплив температури на перебіг хімічної реакції у газовій суміші.....	256
12.7. Дослід Штерна	256
12.8. Барометрична формула	257
12.9. Розподіл Больцмана.....	259
12.10. Вільний пробіг молекул	260
Контрольні запитання	262
Приклади розв'язування задач	262
Задачі.....	264

Розділ 13

ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ГАЗАХ

Якщо система виведена зі стану термодинамічної рівноваги, то в ній виникають нерівноважні незворотні процеси, які називають явищами перенесення. Це дифузія, внутрішнє тертя і теплопровідність, зумовлені міграцією атомів. До цих процесів не можна застосовувати закони термодинаміки, бо це незворотні процеси, їх вивчають кінетичними методами і пояснюють на підставі єдиного механізму – перенесенням молекулами під час їхнього хаотичного руху з однієї частини простору в іншу якоїсь характерної фізичної величини. Дифузія – це перенесення частинок або маси речовини, внутрішнє тертя – перенесення імпульсу напрявленого руху молекул, теплопровідність – перенесення теплової енергії.

13.1. Дифузія. Внутрішнє тертя. Теплопровідність

Розглянемо головні закономірності процесів перенесення та їхнє наближене якісне обґрунтування.

1. **Дифузія газів.** Якщо в посудину, заповнену одним газом, помістити порцію іншого газу, то внаслідок теплового руху молекули одного сорту будуть проникати у простір, зайнятий молекулами іншого сорту. У результаті матимемо процес вирівнювання концентрацій молекул обох газів, який пошириться на весь простір, зайнятий газом. Отже, *дифузія – це процес вирівнювання концентрацій у суміші декількох речовин, зумовлений тепловим рухом молекул.* Є емпірична формула для цього процесу:

$$N = -D \frac{dn}{dz} . \quad (13.1)$$

Це **закон Фіка**: кількість молекул N , які проходять за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку перенесення, прямо пропорційна градієнтові концентрації молекул dn/dz . Величину D називають коефіцієнтом дифузії, його вимірюють у метрах квадратних за секунду ($\text{м}^2/\text{с}$). Знак мінус у формулі (13.1) зумовлений тим, що дифузія спрямована в бік зменшення концентрації частинок.

Якщо обидві сторони формули (13.1) помножити на масу m молекул газу одного сорту, то отримаємо рівняння для маси цього газу:

$$M = -D \frac{d\rho}{dz}. \quad (13.1, a)$$

Тут $\rho = mn$ – парціальна густина газу; M – маса газу, що проходить через одиницю поверхні за одиницю часу.

Дифузія відіграє важливу роль у природі. Поживні речовини надходять у клітини живих організмів шляхом дифузії. Наприклад, кисень під час дихання надходить у легені людини і тварин, а звідти дифундує у кров. Дифузією користуються у техніці для внесення домішок у відповідні матеріали, щоб поліпшити їхні властивості.

2. Внутрішнє тертя. Розглянемо потік газу. Тут кожна молекула газу бере участь у двох різновидах руху: спрямованому (упорядкованому) і хаотичному (тепловому). Якщо шари рухаються з різними швидкостями то молекули газу внаслідок теплового руху переходять з одного шару в інший уперек руху шару і переносять імпульс напрямленого руху молекул свого шару в суміжний. Це спричинює зміну імпульсу напрямленого руху молекул шару, а за другим законом Ньютона, зміна імпульсу за одиницю часу дорівнює силі. Отже, між рухомими шарами газу внаслідок зміни імпульсу напрямленого руху їхніх молекул виникає сила внутрішнього тертя.

Розглянемо такий дослід. На вертикальній осі малого електромотора закріплено горизонтальний диск (рис.13.1). Над ним на відстані 1-2 мм на довгій тонкій пружній дротині підвішено другий легкий диск. Якщо запустити мотор, то завдяки внутрішньому тертю шари повітря, які безпосередньо прилягають до нижнього диска, втягуються в рух і, відповідно, втягують у рух дальші шари повітря. Таким чином рух передається від шару до

шару аж до верхнього диска, внаслідок чого під дією сили внутрішнього тертя він повертається на деякий кут, що реєструють за допомогою дзеркальця, закріпленого над верхнім диском.

Отже, **внутрішнє тертя** – це явище виникнення сил тертя між шарами одного газу, які рухаються з різними швидкостями. Його описує **закон Ньютона**

$$F = \eta \frac{dU}{dz} \quad (13.2)$$

де F – сила внутрішнього тертя, яка діє на одиницю площі поверхні шару, dU/dz – градієнт швидкості напрямленого руху молекул газу. Коефіцієнт внутрішнього тертя (в'язкості) η чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі, якщо градієнт швидкості шарів дорівнює одиниці. Його вимірюють у кілограмах на метр-секунду (кг/м·с) або, що те саме, в паскаль-секундах (Па·с).

Внутрішнім тертям у газах пояснюють, наприклад, вщухання бурі або сильного вітру з часом, а також те, що для проштовхування газу по трубі потрібно виконувати роботу, яка витрачається на подолання сили внутрішнього тертя.

3. Теплопровідність. Якщо в газі створити різницю температур, то середня кінетична енергія молекул газу в місцях з різною температурою буде різною. Високоенергетичні молекули газу, рухаючись хаотично, мігрують з шару в шар і, стикаючись із молекулами з меншою кінетичною енергією хаотичного теплового руху, передаватимуть їм надлишок своєї енергії. Унаслідок цього відбуватиметься спрямоване перенесення теплової енергії з шару в шар, з теплішого місця в холодніше. Таке передавання теплової енергії називають теплопровідністю.

Теплопровідність це процес вирівнювання температур, зумовлений міграцією молекул газу. Тепловий потік, утворений у газі, описує **закон Фур'є**:

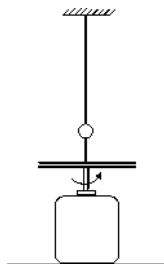


Рис. 13.1 Завдяки силі внутрішнього тертя в повітрі рух від нижнього диска передається до верхнього

$$q = -\chi \frac{dT}{dz} . \quad (13.3)$$

Кількість теплоти q , яка переходить за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку перенесення, прямо пропорційна градієнту температури. Знак мінус відображає той факт, що теплота йде у напрямі зниження температури. Коефіцієнт пропорційності χ називають коефіцієнтом теплопровідності, його вимірюють у ватах на метр-кельвін (Вт/м·К). З газів найбільшу теплопровідність має водень, вона у декілька разів перевищує теплопровідність інших газів.

Як зовнішній вигляд формул (13.1) – (13.3), так і закономірності всіх трьох явищ перенесення подібні між собою, тому треба сподіватися на зв'язок між коефіцієнтами D , η і χ . Такий зв'язок справді установлює молекулярно-кінетична теорія, пов'язуючи ці коефіцієнти з мікрохарактеристиками теплового руху молекул газу.

13.2. Теорія процесів перенесення в газах

13.2.1. Потік молекул через поверхню

Для характеристики інтенсивності процесу перенесення якоїсь фізичної величини (речовини, енергії, імпульсу молекул) з одного місця середовища в інше важливим є поняття потоку відповідної величини.

Потоком якої-небудь величини називають кількість цієї величини, яка проходить за одиницю часу через уявну поверхню S у напрямі нормалі до цієї поверхні.

Розглянемо це детальніше на прикладі потоку молекул газу, що проходять через площинку ΔS за час Δt зліва направо.

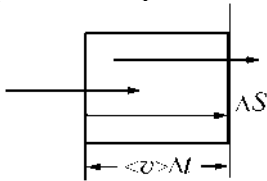


Рис. 13.2. Потік молекул через площинку ΔS

Для цього подумки виділимо в газі циліндр з площею основи ΔS і висотою $\langle v \rangle \Delta t$ (рис. 13.2), де $\langle v \rangle$ – середня швидкість хаотичного руху молекул. В одиниці об'єму газу є n молекул (n –

концентрація молекул). Оскільки рух молекул хаотичний, то його можна розкласти на три взаємно перпендикулярні напрями і, внаслідок рівномірності цих напрямів, уздовж кожного з них буде рухатись лише 1/3 частина з загальної кількості молекул. Нехай один з цих напрямів збігається з напрямом нормалі до площинки ΔS . Тоді в бік площинки ΔS буде рухатись 1/6 частина молекул із загальної їх кількості в циліндрі. Припустимо, що всі молекули мають однакові швидкості $\langle v \rangle$. За час Δt через площинку ΔS останньою пройде та молекула, яка на час $t = 0$ була на відстані $\langle v \rangle \Delta t$ від площинки ΔS і, крім того, пройдуть усі інші, які були усередині циліндра об'ємом $\Delta S \langle v \rangle \Delta t$. Загальна кількість молекул у цьому циліндрі дорівнює добуткові концентрації молекул n на його об'єм. Отже, через площинку ΔS за час Δt пройде кількість молекул, визначена формулою

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta t \Delta S .$$

Величину N , що дорівнює кількості молекул, які пройшли через площину S , перпендикулярну до напрямку руху молекул, за одиницю часу, називають потоком молекул через площину S :

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S . \quad (13.4)$$

Потік N – величина скалярна. **Густиною потоку** молекул називають кількість молекул, які проходять за одиницю часу через одиничну площинку, перпендикулярну до швидкості руху молекул:

$$j = \frac{1}{6} n \langle v \rangle . \quad (13.5)$$

Цей результат наближений, проте в наших подальших обчисленнях ми будемо користуватись формулою (13.5).

13.2.2. Дифузія

З'ясуємо явище дифузії з погляду молекулярно-кінетичної теорії. Можна припустити, що дифузія залежатиме від середньої швидкості хаотичного руху молекул, а також від інтенсивності зіткнень між молекулами газу, тобто від їхнього середнього вільного пробігу l .

У загальному випадку, коли у суміші газів маси їхніх молекул і поперечні перерізи взаємодій різні, процес дифузії значно ускладнений. Це пов'язане з тим, що середня арифметична швидкість молекул $\langle v \rangle$ залежить від їхньої маси і, крім того, в суміші двох газів під час хаотичного руху між молекулами існують різні види взаємодій: між молекулами першої компоненти газу, між молекулами другої компоненти та між молекулами першої і другої компонент. Крім цього, в процесі дифузії концентрації вирівнюються, тобто вони змінюються з плином часу, а отже, процес дифузії нестаціонарний.

Спростимо явище дифузії. Вважатимемо, що в основному газі маємо лише одну домішку іншого газу і що, діючи на гази ззовні, можна зробити різницю концентрацій домішки у газі сталою, тобто зробити дифузію стаціонарним процесом. Також уважатимемо, що у суміші двох газів маси молекул $m_1 \approx m_2 \approx m$ майже однакові. У подальшому припускати будемо, що всі молекули мають однакову швидкість теплового руху $\langle v \rangle$, а концентрація молекул змінюється лише вздовж осі z , тобто залежить від однієї координати z ; швидкість зміни концентрації будемо характеризувати градієнтом концентрації dn/dz .

Виберемо в газі уявну площину S так, щоб вісь z була перпендикулярна до неї (рис. 13.3). Через N_1 позначимо кількість молекул домішки, які проходять через площину S за одиницю часу в напрямі осі z зліва направо; через N_2 — кількість молекул цієї ж домішки, які пролітають через площину S за одиницю часу у зворотному напрямі. Тоді

$$\Delta N = N_1 - N_2$$

буде сумарним потоком молекул домішкової компоненти газу, який проходить через поверхню S за одиницю часу у напрямі осі z .

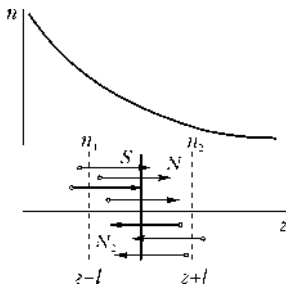


Рис. 13.3. Під час дифузії внаслідок теплового руху відбувається вирівнювання концентрацій молекул

Згідно з формулою (13.4) потоки молекул N_1 і N_2 , відповідно, такі:

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 < v > S ;$$

$$N_2 = \frac{1}{6} n_2 < v > S .$$

Для ΔN отримуємо вираз

$$\Delta N = \frac{1}{6} < v > S (n_1 - n_2) .$$

Тут n_1 і n_2 – концентрації молекул домішкового газу з одного й іншого боків від площини S на відстані середнього вільного пробігу l . Справді, хоча концентрація n змінюється вздовж осі z , то до площини S молекули надходять з тих місць, де відбулися їхні останні зіткнення, тобто вони надходять із шару, який є на відстані середнього вільного пробігу молекул. Отже, n_1 і n_2 – це концентрації у тих точках простору, які були на відстані l по обидва боки від площини S . Оскільки $n=f(z)$, то нам треба знайти зміну концентрацій молекул ($n_1 - n_2$) на відстані середнього вільного пробігу l по обидва боки від S , тобто на відстані між площинами $\Delta z = 2l$. Відомо, що зміна концентрації на одиниці довжини дорівнює dn/dz , тому зміна концентрації на інтервалі $2l$

$$n_1 - n_2 = -(n_2 - n_1) = -\frac{dn}{dz} 2l ,$$

звідки

$$\Delta N = -\frac{1}{6} < v > S \frac{dn}{dz} 2l = -\frac{1}{3} < v > l \frac{dn}{dz} S ,$$

і для сумарного потоку молекул домішкового газу через одиницю площі за 1 с отримаємо формулу

$$N = -\frac{1}{3} < v > l \frac{dn}{dz} .$$

Зіставимо цю формулу з емпіричним виразом для дифузії

$$N = -D \frac{dn}{dz}$$

і для коефіцієнта дифузії D отримаємо

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle l . \quad (13.6)$$

Як бачимо, коефіцієнт дифузії D залежить від середньої швидкості хаотичного руху молекул $\langle v \rangle$, тобто від температури газу, бо $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Це означає, що з підвищенням температури швидкість дифузії в газах збільшується. Крім того, оскільки $l \sim 1/P$, то з підвищенням тиску швидкість дифузії зменшується.

Цей випадок дифузії, коли маси молекул приблизно однакові, називають самодифузією. Інакше кажучи, це дифузія молекул у власному газі.

13.2.3. Внутрішнє тертя (в'язкість)

Розглянемо у потоці газу два суміжні шари, які рухаються паралельно один щодо одного з швидкостями U_1 і U_2 (рис.13.4). Отже, в газі маємо градієнт швидкості dU/dz напрямленого руху молекул, який будемо вважати спрямованим уздовж осі z . Подумки виберемо всередині газу деяку площину S , паралельну до шарів газу. Потік молекул N , які внаслідок хаотичного руху пролітають через площину S в один бік, наприклад, зверху вниз:

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t .$$

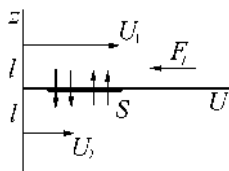


Рис.13.4. Пояснення механізму виникнення в'язкості

Хоча кількість молекул, що переходять через площину S унаслідок хаотичного руху з одного шару в інший зверху вниз і знизу вверх за проміжок часу Δt буде однакою, та оскільки швидкості напрямлених рухів молекул у суміжних шарах різні, то вони переносять через площину S різний імпульс напрямленого руху. Молекули, які рухаються зверху вниз, переносять імпульс

$$K_1 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t m U_1 ,$$

а ті, що рухаються знизу вгору –

$$K_2 = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t m U_2.$$

Сумарний імпульс ΔK напрямленого руху, який молекули переносять через площину S за інтервал часу Δt , буде зміною імпульсів $\Delta K = K_1 - K_2$:

$$\Delta K = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t m (U_1 - U_2).$$

У попередньому параграфі вже йшлося про те, що U_1 і U_2 треба відносити до шарів, які розташовані по різні боки площини S на відстані середнього вільного пробігу молекул l від неї. Тому так само, як у випадку дифузії, запишемо

$$U_1 - U_2 = 2l \frac{dU}{dz}.$$

Для зміни імпульсу ΔK отримаємо вираз

$$\Delta K = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho \frac{dU}{dz} S \Delta t,$$

де $\rho = nm$ – густина газу. Зміна імпульсу за одиницю часу – це сила, що діє на шар газу площею S , тобто сила внутрішнього тертя:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = F_T.$$

Отже, для сили внутрішнього тертя одержуємо формулу

$$F_T = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho \frac{dU}{dz} S.$$

Порівняємо цю формулу з (13.2) й отримаємо вираз для коефіцієнта в'язкості (внутрішнього тертя) газу

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho. \quad (13.7)$$

Як бачимо, коефіцієнт в'язкості η не залежить від тиску, бо в добутку $l\rho$ перший співмножник обернено пропорційний до тиску, а другий – прямо пропорційний. З підвищенням температури коефіцієнт в'язкості зростає, бо $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$.

13.2.4. Теплопровідність

Уявимо собі, що між двома горизонтально розташованими одна над одною металевими пластинами міститься газ. Припустимо, що верхня пластина має вищу температуру, ніж нижня. Спрямуємо вісь z угору, перпендикулярно до пластин. Будемо вважати, що в газі стала різниця температур, тобто вздовж осі z існує сталий градієнт температури dT/dz . Потоки молекул, які внаслідок теплового руху пролітають через деяку уявну площину S , розташовану між металевими пластинами (рис.13.5), перпендикулярно до осі z за проміжок часу Δt як знизу в гору, так і у зворотному напрямі, однакові:

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t ,$$

але переносять різну кількість енергії, бо вилітають з шарів, що мають різну температуру. Загальна кількість енергії, перенесеної цими двома потоками молекул через площину S за час Δt ,

$$Q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t \left(\frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right). \quad (13.8)$$

Тут T_1 і T_2 – температури шарів газу на відстані середнього вільного пробігу l від площини S зверху і знизу від неї; $i/2 k T$ – енергія, яку переносить одна молекула з одного шару газу в інший.

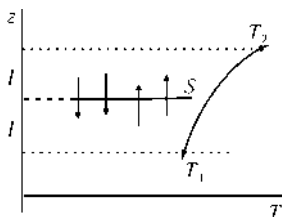


Рис. 13.5. Потоки молекул переносять через уявну площину S різну кількість енергії

Формулу (13.8) можна переписати інакше:

$$Q = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) = -\frac{1}{3} \langle v \rangle l \frac{i}{2} k n \frac{dT}{dz} S \Delta t , \quad (13.9)$$

бо

$$T_1 - T_2 = -2l \frac{dT}{dz} .$$

Величина $i/2 kTN_A$ – це енергія теплового руху молекул 1 моля газу, а $i/2 kN_A$ характеризує збільшення енергії теплового руху молекул 1 моля газу внаслідок його нагрівання на 1 К за сталого об'єму. Таку величину називають молярною теплоємністю газу за сталого об'єму C_V (див. параграф 16.7). Тому вираз $i/2 kn$ можна записати так:

$$\frac{i}{2}kn = \frac{i}{2}kN_A \frac{nm}{N_A m} = \frac{C_V}{\mu} \rho = c_V \rho,$$

де $\rho = nm$ – густина газу; $\mu = N_A m$ – молярна маса; c_V – питома теплоємність газу за сталого об'єму. Підставимо вираз $c_V \rho$ у формулу (13.9) і поділимо її на $S \Delta t$:

$$q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho c_V \frac{dT}{dz}, \quad (13.10)$$

де $q = \frac{Q}{S \Delta t}$ – кількість теплоти, що переходить за одиницю часу через одиницю площі, перпендикулярної до напрямку перенесення.

Порівняємо формулу (13.10) з емпіричною формулою (13.3) й отримаємо вираз для коефіцієнта теплопровідності:

$$\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho c_V. \quad (13.11)$$

З формули (13.11) випливає, що *коефіцієнт теплопровідності χ не залежить від тиску*. Справді, довжина вільного пробігу l обернено пропорційна до тиску, а густина ρ – прямо пропорційна. А втім, це справджується лише доти, доки l є малою стосовно відстані між поверхнями, які мають температури T_1 і T_2 . За малих тисків, коли l приблизно дорівнює цій відстані або перевищує її (наприклад, між стінками термоса), теплопровідність зменшується зі зниженням тиску, бо зменшується кількість молекул в одиниці об'єму, тобто концентрація n .

Теплопровідність, як дифузія і внутрішнє тертя у газах, зростає з підвищенням температури, бо $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$.

13.2.5. Співвідношення між коефіцієнтами явищ перенесення

Порівняємо отримані в попередніх параграфах вирази для коефіцієнтів:

$$\text{дифузії (13.6)} \quad D = \frac{1}{3} \langle v \rangle l;$$

$$\text{внутрішнього тертя (13.7)} \quad \eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho;$$

$$\text{теплопровідності (13.11)} \quad \chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho c_v.$$

Як бачимо,

$$\eta = D\rho \quad \text{і} \quad \chi = D\rho c_v,$$

тобто коефіцієнти явищ перенесення пов'язані між собою, що збігається з дослідними даними. Це означає, що молекулярно-кінетичний механізм, який є в основі пояснення явищ дифузії, внутрішнього тертя і теплопровідності, спільний для цих явищ. Завдяки цьому можна визначити одні коефіцієнти явища перенесення, якщо з досліду одержані коефіцієнти іншого явища перенесення. Крім того, вимірявши на досліді будь-який з коефіцієнтів явища перенесення, можна оцінити середню довжину вільного пробігу молекул, а отже, і їхні розміри. Визначені таким способом значення ефективних перерізів молекул конкретного газу з різних коефіцієнтів явищ перенесення добре збігаються, їх називають **газокінетичними перерізами**.

Контрольні запитання

1. Чому до явищ перенесення не можна застосовувати звичайні закони термодинаміки?
2. Яку роль у природі відіграє дифузія?
3. Що називаємо потоком молекул через поверхню?
4. Як пов'язані між собою коефіцієнти явищ перенесення?
5. Звідки видно, що коефіцієнти явищ перенесення залежать від температури?

Приклади розв'язування задач

13.1. Знайдіть коефіцієнт дифузії гелію за нормальних умов, якщо ефективний діаметр молекул гелію $d=0,20$ нм.

Розв'язування. Нормальні умови маємо тоді, коли $P=101,32$ кПа і $T=273$ К. Коефіцієнт дифузії виражає така формула:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle l.$$

Тут $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}; \quad n = \frac{P}{kT}.$

Отже,

$$D = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{3,14 (2 \cdot 10^{-10})^2 101,32 \cdot 10^3} = 12 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

13.2. Знайдіть ефективний діаметр молекули кисню за температури $t=0^\circ\text{C}$. Коефіцієнт в'язкості кисню $\eta=18,8$ мкПа·с.

Розв'язування. Для коефіцієнта в'язкості (внутрішнього тертя) маємо формулу

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle l \rho, \quad \text{де } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}; \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

З рівняння Клапейрона–Менделєєва густина газу $\rho = \frac{P\mu}{RT}.$

Підставимо ці величини у формулу для η :

$$\eta = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \cdot \frac{P\mu}{RT} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\mu T}{\pi R}}.$$

Звідси $d^2 = \frac{2}{3} \frac{k}{\pi \eta} \sqrt{\frac{\mu T}{\pi R}} = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 3,14 \cdot 18,8 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 273}{3,14 \cdot 8,31}} = 9 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2;$

$$d^2 = 9 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2, \quad d = 0,3 \text{ нм}.$$

Задачі

13.1. Знайдіть коефіцієнт дифузії водню за нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу $l=0,16$ мкм.

Відповідь: $9,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$

13.2. Знайдіть в'язкість азоту, що перебуває під тиском $P=101,3$ кПа при температурі $T=273$ К, якщо коефіцієнт дифузії для нього $D=1,42 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$

Відповідь: $17,8 \text{ мкПа} \cdot \text{с}.$

13.3. Яку кількість теплоти витрачає парник за одну годину внаслідок теплопровідності повітряного шару між двома поліамідними плівками? Площа кожної плівки $S=4 \text{ м}^2$, відстань між ними $\Delta x=30$ см. Температура в парнику $t_1=18^\circ\text{C}$, ззовні $t_2=-20^\circ\text{C}$. Ефективний діаметр молекул повіт-

ря $d=0,3$ нм. Температуру повітряного шару між плівками вважайте середньою арифметичною температур в упарнику і зовнішнього повітря. Тиск повітря $P=101,3$ кПа.

Відповідь: 23,9 кДж.

Розділ 14

МЕТОДИ ОТРИМАННЯ І ВИМІРЮВАННЯ ВИСОКОГО ВАКУУМУ

Багато явищ у газах зумовлені зіткненнями між молекулами. Зі зниженням тиску довжина вільного пробігу молекул збільшується, частота зіткнень зменшується і за відповідно низького тиску зіткнень між молекулами газу не буде зовсім. Вони вдарятимуться лише до стінок посудини. Таке розрідження газу, коли довжина вільного пробігу молекул сумірна з лінійними розмірами посудини, у якій міститься газ, називають вакуумом.

У сучасній науці й техніці важливого значення набули дослідження фізичних процесів, що відбуваються в умовах дуже високого вакууму, наприклад, у космосі. Методам отримання і вимірювання такого вакууму приділено багато уваги, завдяки чому сьогодні можна у великих об'ємах отримати і зберігати високий ступінь розрідження газу з тиском близько 10^{-11} Па.

Поняття вакууму відносне. Що менші розміри об'єму, в якому міститься газ, то за більшого тиску в ньому утворюються умови вакууму. Наприклад, для газу, який міститься у порах з лінійними розмірами 10^{-8} м, вакуум досягається вже за атмосферного тиску. Отже, поняття вакууму визначене співвідношенням між середньою довжиною вільного пробігу молекул у газі і лінійними розмірами об'єму, в якому міститься газ.

14.1. Методи отримання високого вакууму

Високим вакуумом називають таке розрідження газу, коли його тиск нижчий 10^{-4} Па. Такому тискові відповідає середня довжина вільного пробігу молекул близько 50 м. Насосів, які б давали таке розрідження з викидом газу безпосередньо в атмосферу, нема. Повсякденно застосовують насоси попереднього розрідження, які з'єднують послідовно з високовакуумними.

14.1.1. Насоси попереднього розрідження

Розглянемо конструкцію сучасного насоса попереднього розрідження – так званого ротаційного форвакуумного насоса (рис.14.1).

У центрі кожуха K навколо осі O обертається сталевий циліндр – ротор R , виготовлений у вигляді ексцентрика. Він міститься всередині обойми r , яка має порожнисту пластину P . У нижній частині пластини є отвір D , який з'єднує засмоктувальну трубку 1 з внутрішньою камерою насоса A . Пластина проходить через шарнір C , який дає їй змогу нахилитися в обидва боки від

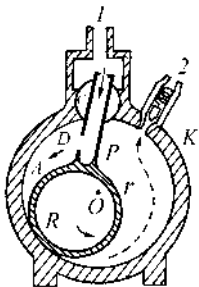


Рис. 14.1. Схема конструкції ротаційного форвакуумного насоса

вертикального положення. Під час обертання ротора обойма r , весь час торкаючись внутрішньої поверхні кожуха, разом з пластиною P ділить його внутрішній простір на дві частини. На рис. 14.1 зображено насос у стані, коли він засмоктує з відкачуваного об'єму газ через вхідний патрубок 1 . Газ виштовхується в атмосферу через вихідний патрубок 2 . Як ротор, так і всі рухомі частини змащені вакуумним мастилом, яке одночасно є ущільненням між деталями насоса. Такі насоси створюють розрідження газу на вході насоса до тиску 10^{-1} Па.

14.1.2. Високовакуумні насоси

Принцип дії сучасних високовакуумних насосів такий: молекули відкачуваного газу захоплює струмінь пари рідини, звичайно, спеціального вакуумного масла, і разом з парою спрямовує вниз на охолоджувану стінку насоса, де пара масла конденсується, а молекули газу втягує форвакуумний насос. Такі насоси часто називають дифузійно-конденсаційними, вони можуть працювати лише за досить низького тиску, який попередньо створює форвакуумний насос так, щоб довжина вільного пробігу молекул газу була десятки сантиметрів. Тому їх приєднують до вхідного патрубку форвакуумного насоса.

Схема будови дифузійного насоса (найпоширенішого сьогодні), який працює на вакуумному маслі, зображена на

рис. 14.2. До верхньої частини насоса *A* приєднано вакуумну систему, з якої треба відкачати газ, а до патрубку *B* – форвакуумний насос. Після того, як форвакуумний насос створить у вакуумній системі тиск близько $1\text{--}10^{-1}$ Па, вмикають електричний нагрівник *H* високовакуумного насоса, у насосі починає нагріватись та інтенсивно випаровуватись робоча рідина *P*. Пара піднімається по трубці *T*, яка розташована над рідиною, і з великою швидкістю виходить із сопла *C*, потрапляючи далі внизу на стінки насоса, де конденсується і стікає вниз на дно циліндра. Стінки циліндра охолоджують проточною водою.

Молекули відкачуваного газу дифундують у насос, де струмінь пари захоплює їх і переносить у нижню частину до викидної труби *B*. Звідси їх відкачує форвакуумний насос.

Найбільше розрідження газу, яке можна досягти у приладі таким способом, визначене тиском насиченої пари робочої рідини за температури охолоджувальної води.

Вакуумні масла мають дуже низький тиск насиченої пари; за кімнатної температури близько 10^{-4} Па. Звичайно, у дифузійних насосах є декілька сопел, які діють послідовно (багатоступеневі насоси).

Для того, щоб отримати ще більше розрідження у вакуумній системі, потрібно вживати спеціальні заходи: по-перше, нагрівання стінок і деталей приладу до значної температури, що сприяє вивільненню адсорбованих газів з поверхонь цих предметів; по-друге, застосування так званих гетерів – речовин (титан), які під час розпорошення (шляхом випаровування під час нагрівання) поглинають і хімічно або фізично зв'язують молекули залишкового газу; по-третє, іонне відкачування газу. Дія сорбційно-іонних насосів така: атоми залишкового газу іонізують і за допомогою електричного та магнітного полів спрямовують до випускного отвору; по-четверте, низькотемпературні методи поліпшення високого вакууму (їхня дія така: на охолоджуваній поверхні відповідних речовин відбувається конденсація молекул

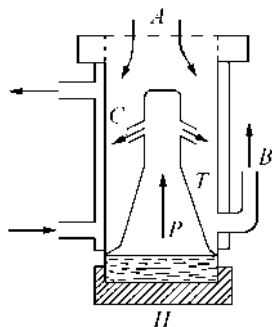


Рис. 14.2. Схема конструкції вакуумного дифузійного насоса

газу, що приводить до зниження тиску у приладі. Це так звані кріогенні методи відкачування і пастки, у яких для зниження температури застосовують рідкий азот).

14.2. Вимірювання низьких тисків

Відомо декілька методів, які є в основі дії вакуумних манометрів, призначених для вимірювання тиску у різних діапазонах низьких тисків. Нема такого одного приладу, який був би придатний для вимірювань у всьому діапазоні низьких тисків, охоплених поняттям вакууму.

14.2.1. Термоелектричний манометр

Принцип дії термометричного манометра ґрунтується на залежності теплопровідності газу від тиску за низьких тисків. Ця залежність особливо чітко виявляється для тисків 10,0–0,1 Па, тому такі манометри застосовують саме в цьому діапазоні. Схему термоелектричного манометра зображено на рис. 14.3. У скляному балоні *B*, приєднаному трубкою *C* до відкачуваного приладу, змонтована термопара *T*. Її спай *A* нагрівають електричним струмом, який протікає по нагрівній дротині *H* від джерела *D*. Силу струму підтримують сталою. Унаслідок нагрівання спаю термопари на її кінцях, що мають кімнатну температуру, виникає термоелектрорушійна сила, яку вимірюють приладом. Значення термоелектрорушійної сили залежить від температури спаю, а вона за сталої сили нагрівання, залежить від тиску газу. Що менший тиск, то менша тепловіддача через газ і вища температура спаю. Це спричинює більшу електрорушійну силу термопари. Шкалу приладу градуюють у мілівольтах і в одиницях тиску.

14.2.2. Іонізаційний манометр

Манометр цього типу застосовують для вимірювання тисків у діапазоні 10^{-1} – 10^{-8} Па. Принцип його дії ґрунтується на тому, що в обмеженому об'ємі іонізують газ і вимірюють електричний струм, створений іонами цього газу. За сталої потужності іонізатора сила іонного струму прямо пропорційна до концентрації іонів, яка, відповідно, прямо пропорційна до тиску газу. Тому

$$I = \gamma P,$$

де γ – коефіцієнт пропорційності.

Конструкцію манометра зображено на рис. 14.4. У скляному балоні, приєднаному трубою C до приладу, у якому треба виміряти тиск залишкових газів, міститься нікелевий циліндр K , а в ньому – спіраль і вольфрамовий катод H . Електрони, які вилітають з нагрітого катода внаслідок термоелектронної емісії, прис-

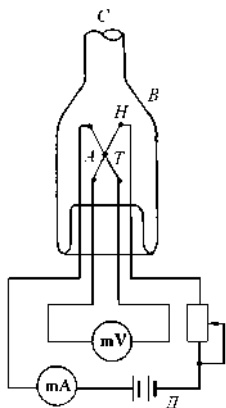


Рис. 14.3. Електрична схема живлення термоелектричного вакуумного манометра

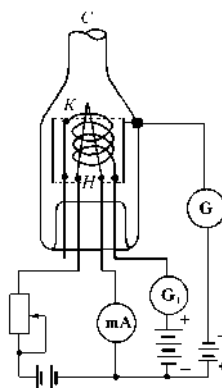


Рис. 14.4. Електрична схема живлення іонізаційного вакуумного манометра

корювані електричним полем спіралі, яка має позитивний потенціал, на шляху до неї іонізують молекули газу. Позитивні іони рухаються до негативно зарядженого колектора K , створюючи іонний струм, який, як, уже зазначено, пропорційний до тиску газу. Градуюють іонізаційні манометри в одиницях тиску у заводських умовах.

14.2.3. Манометр Мак-Леода

Цей манометр дає змогу виміряти абсолютний тиск у межах від 10^2 до 10^{-4} Па. Ідея вимірювання полягає у такому. Газ, тиск якого треба виміряти, стискають у призначеному для цього відомому об'ємі так, щоб цей збільшений тиск можна було виміряти звичайним способом. Для цього слугує скляний балон H відомого об'єму V (рис. 14.5) з припаяним до нього капіляром K_1 . Балон з'єднують трубою A з приладом, із якого відкачують газ і тиск якого треба виміряти. До трубки A , яка сполучає манометр з при-

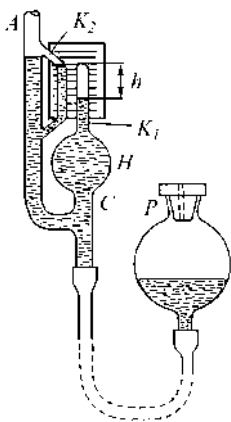


Рис. 14.5. Схема вакуумного манометра Мак-Леода

ють тиск газу в капілярі, який дорівнює різниці рівнів ртуті h в капілярах K_1 і K_2 .

За законом Бойля–Маріотта визначають невідомий тиск P :

$$PV = hV_1,$$

де V_1 – об’єм газу в капілярі K_1 . Відомо, що

$$V_1 = \pi r^2 h.$$

Тут r – радіус капіляра K_1 . Звідси

$$P = \frac{hV_1}{V} = \frac{\pi r^2 h^2}{V}.$$

Радіус капіляра r і об’єм V визначають під час виготовлення манометра, отже, відношення $\pi r^2/V$ є сталою величиною C для цього манометра. Тому виміряний тиск, виражений у міліметрах ртутного стовпця,

$$P = Ch^2,$$

де C – стала манометра.

Недолік манометра Мак-Леода такий: ним не можна виміряти тиску насиченої пари. Щоб позбутися пари ртуті у вакуумній системі, на її шляху від манометра до вакуумної системи ставлять

пастки з рідким азотом. Крім того, треба пам'ятати, що пара ртуті шкідлива для здоров'я людини.

14.3. Властивості газів за низьких тисків

Високий вакуум впливає на властивості газу. Оскільки в умовах вакууму зіткнень між молекулами немає, то передавання молекулярних ознак відбувається по-іншому, ніж за звичайних умов (у явищах перенесення), воно відбувається дуже швидко і залежить від форми об'єму, в якому міститься газ.

14.3.1. Теплопередача

В ультрарозрідженому газі (вакуумі) молекули не вдаряються між собою, вони летять по прямих лініях від однієї стінки посудини до іншої. Уявимо собі, що в такому розрідженому газі перебуває гаряче тіло, температура T_2 якого більша від температури стінок посуду T_1 . Після зіткнення з гарячим тілом молекула відлетить від нього з енергією

$$W_2 = \frac{i}{2} k T_2.$$

Зіткнувшись зі стінкою посудини (удар не абсолютно пружний, бо температури тіла і стінки різні), молекула відлетить від неї вже з меншою енергією

$$W_1 = \frac{i}{2} k T_1,$$

віддавши частину своєї енергії

$$\Delta W = \frac{i}{2} k (T_2 - T_1)$$

стінці. Отже, від гарячого тіла до стінки посудини передалася теплова енергія. У газі, який перебуває в ультрарозрідженому стані, нема градієнта температур, тому таке явище – це не теплопровідність, а теплопередача. Залежність теплопередачі від тиску в ультрарозрідженому газі інша, ніж залежність теплопровідності за більших тисків. За звичайних тисків теплопровідність не залежить від тиску, а теплопередача зменшується зі зниженням тиску, бо зменшується кількість молекул в об'ємі, а отже, і кількість ударів молекул у стінку і гаряче тіло.

Мала теплопередача за низьких тисків практично застосована в посудинах Дьюара (термосах). Це посудини з подвійними стінками, між якими створено вакуум ($\sim 0,1$ Па). У побуті їх використовують для зберігання гарячої їжі, а в техніці – зріджених газів (гелію, азоту, повітря), які киплять за низьких температур.

14.3.2. Ефузія

Маємо посудину з газом, розділену пористою перегородкою. Якщо розміри пор менші від довжини вільного пробігу молекул газу за заданого тиску в посудині, то молекули пролітатимуть крізь пори без зіткнень між собою, тобто одна за одною. Таке проходження газу крізь пористу перегородку називають ефузією, воно супроводжується своєрідними явищами.

1. Якщо по різні боки від пористої перегородки міститься той самий газ, але з різною температурою, то рівновага установлюється тоді, коли кількість молекул, які перелітають з однієї частини посудини в іншу, дорівнює кількості молекул, що летять у зворотному напрямі. З огляду на те, що кількість молекул, які проходять через уявну поверхню S без зіткнень

$$N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S,$$

отримуємо умову рівноваги

$$\frac{1}{6} n_1 \langle v_1 \rangle S_{\text{еф}} = \frac{1}{6} n_2 \langle v_2 \rangle S_{\text{еф}}, \quad (14.1)$$

де $S_{\text{еф}}$ – ефективна сумарна площа пор у перегородці. Оскільки

$$n = \frac{P}{kT}$$

і $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то з формули (14.1) отримаємо

$$\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2}{\sqrt{T_2}},$$

тобто рівновага установлюється такою, що там, де температура вища, тиск газу більший. За нормальних умов така ситуація була б неможлива, бо гідродинамічні потоки вирівнювали б тиски.

2. Тепер уявимо собі, що в різних частинах посудини, розділеної пористою перегородкою, є різні за масами молекул газу

(наприклад, водень і кисень). Припустимо, що температура і тиск газів у початковий момент часу в обох частинах посудини були однакові. Такий стан не буде рівноважним. Хоча концентрації молекул з обох боків перегородки однакові, проте середні швидкості молекул різні, легші молекули рухаються швидше, бо

$$\langle v \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Тому потік легких молекул через пори буде більший від зворотного потоку ($1/6 n_1 \langle v_1 \rangle$) важких молекул. Унаслідок цього тиск у половині посудини з молекулами більших мас буде підвищуватися, а в іншій половині – знижуватися (рис. 14.6). Зміна тиску припиниться, коли кількість молекул, що пролітають через пори з обох боків за одиницю часу, зрівняється і концентрація молекул у половині посудини з важкими молекулами збільшиться. Надалі кількість молекул, які пролітають через пори з боку важких молекул, буде збільшуватися, тиск там почне знижуватися, а в іншій половині, де легкі молекули, тиск підвищуватиметься доти, доки тиски в обох половинах не зрівняються, молекули перемішаються, концентрації молекул кожного сорту в обох частинах посудини зрівняються.

Явище ефузії застосовують для розділення газових сумішей, особливо у тих випадках, коли їх не можна розділити хімічним способом (ізотопи).

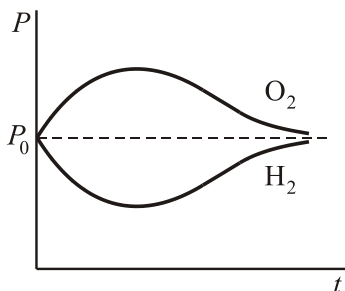


Рис. 14.6. Зміна тиску в різних частинах приладу, заповнених газами O_2 і H_2 та розділених пористою перегородкою

На рис. 14.7 показано схему ефузійного способу розділення газів. Потік суміші газів 1 розгалужується, молекули з меншою масою (більшими середніми швидкостями) проходять через пори в більшій кількості, тому потік 2 буде збагачений компонентою легкого газу.

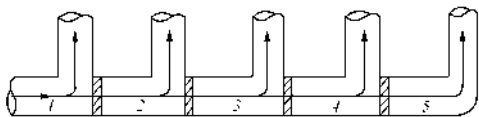


Рис. 14.7. Застосування явища ефузії для розділення газових сумішей

Цей збагачений потік знову розділяється на дві частини, одна з яких проходить через другу пористу перегородку і т.д. Під час багаторазового повторення такого процесу на виході 5 отримаємо газ лише легких молекул. Так були розділені ізотопи неону. Для розділення ізотопів вуглецю з атомними масами 12 і 13 використовували газоподібну сполуку метан (CH_4), а для розділення ізотопів урану з атомними масами 235 і 238 (U^{235} і U^{238}) – сполуку шестифтористого урану (UF_6), який має значну пружність пари.

Контрольні запитання

1. Що називаємо вакуумом?
2. Які є методи отримання високого вакууму?
3. Яка різниця між теплопровідністю і теплопередачею?
4. У чому суть явища ефузії?
5. Які види вакуумних манометрів Ви знаєте?
6. Який з вакуумних манометрів дає змогу виміряти абсолютний тиск у вакуумній системі?

Розділ 13 ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ГАЗАХ	265
13.1. Дифузія. Внутрішнє тертя. Теплопровідність.....	265
13.2. Теорія процесів перенесення в газах	268
13.2.1. Потік молекул через поверхню	268
13.2.2. Дифузія	269
13.2.3. Внутрішнє тертя (в'язкість).....	272
13.2.4. Теплопровідність	274
13.2.5. Співвідношення між коефіцієнтами явищ перенесення.....	275
Контрольні запитання	276
Приклади розв'язування задач	276
Задачі.....	277
 Розділ 14 МЕТОДИ ОТРИМАННЯ І ВИМІРЮВАННЯ ВИСОКОГО ВАКУУМУ.....	279
14.1. Методи отримання високого вакууму	279
14.1.1. Насоси попереднього розрідження	280
14.1.2. Високовакуумні насоси.....	280
14.2. Вимірювання низьких тисків.....	282
14.2.1. Термоелектричний манометр	282
14.2.2. Іонізаційний манометр	282
14.2.3. Манометр Мак-Леода.....	283
14.3. Властивості газів за низьких тисків	285
14.3.1. Теплопередача.....	285
14.3.2. Ефузія.....	286
Контрольні запитання	288

Розділ 15 РЕАЛЬНІ ГАЗИ

Експериментальні дослідження засвідчують, що реальні гази за високих тисків не підпорядковані законам ідеального газу. Наприклад, добуток тиску на об'єм для кисню і водню не є сталим під час зміни тиску за сталої температури, як повинно б бути за законом Бойля–Маріотта. Це означає, що за великого тиску, тобто за великої густини газів треба враховувати власний об'єм молекул і сили взаємодії між ними, якими нехтують у випадку ідеальних газів.

15.1. Потенціальна крива взаємодії молекул

Результати експериментальних досліджень дають змогу зробити висновок про те, що молекули газу на далеких відстанях (декілька атомних діаметрів) притягуються, а на близьких – відштовхуються.

Потенціальна енергія взаємодії двох молекул пов'язана з силою взаємодії між ними такою формулою:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Графік потенціальної енергії такої взаємодії зображено на рис. 15.1. Як видно, крива не симетрична відносно положення рівноваги, а це свідчить про те, що сили міжмолекулярної взаємодії не підпорядковані закону Гука. Потенціальна енергія змінюється від додатного значення за малих r до

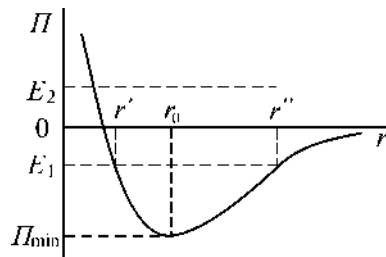


Рис. 15.1. Потенціальна крива взаємодії між двома молекулами

від'ємного за великих r і має мінімум у точці r_0 , де сила $F = 0$. Тоді система перебуває у стані рівноваги.

Розглянемо такий приклад. Припустимо, що молекула 1 розташована у центрі координат, а молекула 2, яка має енергію

$$E_1 = \frac{i}{2} kT_1,$$

віддаляється від неї. Припустимо далі, що $E_1 < |\Pi_{\min}|$. З графіка видно, що під час руху паралельно до осі абсцис кінетична енергія молекули 2 змінюватиметься від нуля у точці r' до максимального значення у точці r_0 . Повна енергія системи двох молекул стала, вона дорівнює E_1 . Рухомою молекулою 2 не може зовсім відірватись від нерухомої 1, вона перебуває у потенціальній ямі й може виконувати лише ангармонічні коливальні рухи в межах від r' до r'' . Якщо енергію молекули 2 збільшити до $E_2 > E_1$ (див. рис. 15.1), то вона, віддаляючись від молекули 1, може зовсім її покинути. Практично це означає, що молекула 2 покидає вузол кристалічної ґратки, інакше кажучи, речовина з кристалічного стану перетворюється у рідкий. Величина $|\Pi_{\min}|$ характеризує енергію зв'язку молекул у кристалі.

Характер руху молекул залежить від співвідношення між енергією теплового руху $i/2 kT$ й енергією зв'язку $\Pi_{\min}$. Отже, можемо зробити такі висновки:

1) якщо середня енергія теплового руху молекул

$$\frac{i}{2} kT < |\Pi_{\min}|,$$

то тіло перебуває у твердому стані;

2) якщо

$$\frac{i}{2} kT \sim |\Pi_{\min}|,$$

маємо рідину;

3) якщо ж

$$\frac{i}{2} kT > |\Pi_{\min}|,$$

то речовина є в газоподібному стані.

У рідкого гелію значення $|P_{\min}|$, яке характеризує енергію зв'язку молекули у кристалі, дуже мале, тому за звичайних тисків гелій не можна кристалізувати одним лише охолодженням.

Несиметричність кривої $P(r)$ (ангармонічність теплових коливань) є в основі пояснення явища теплового розширення твердих тіл.

15.2. Поняття про природу сил взаємодії між молекулами

Природу сил взаємодії між молекулами не можна пояснити на підставі лише законів класичної фізики. Взагалі нема єдиного закону, який описував би міжмолекулярну взаємодію. Під час зближення молекул на малі відстані ($r < 10^{-10}$ м) виникають квантово-механічні сили, які в одних випадках приводять до виникнення сил відштовхування, в інших – до притягання між атомами і створення між ними стійких хімічних зв'язків, тобто до хімічної реакції.

На великих відстанях між молекулами діють ван-дер-ваальсівські сили притягання, які виявляються між усіма молекулами реального газу, що взаємодіють, і не пов'язані з процесом обміну зарядом між тими частинками.

Розглянемо детальніше особливості цих сил. Це порівняно слабкі сили і, на відміну від хімічної взаємодії, не приводять до утворення молекул. Розрізняють три види взаємодій, зумовлених силами Ван-дер-Ваальса.

1. Орієнтаційні сили. Деякі молекули можна сприймати як електричні диполі (полярні молекули), тоді сили взаємодії між ними, так звані орієнтаційні, є силами дипольного, електростатичного походження, вони зменшуються з відстанню за законом $F \sim 1/r^7$. Оскільки ступінь орієнтації диполів залежить від теплового руху молекул, то ця сила взаємодії зменшується з підвищенням температури.

2. Індукційні сили. Це сили взаємодії полярних молекул з неполярними (поляризаційна взаємодія). Полярна молекула своїм електричним полем поляризує неполярну, внаслідок чого між ними виникає сила притягання, яка не залежить від температури.

3. Дисперсійні сили. Атоми й молекули – це багатоелектронні системи; внаслідок руху електронів виникають моменти,

коли неполярна молекула, з огляду на флуктуацію густини електричного заряду стає полярною, тобто розподіл електронної хмари стає сферично несиметричним. Це триває недовго, і в ті короткі моменти молекула стає полярною, що приводить до виникнення сил взаємодії. Отже, цей вид взаємодії пояснюють коливанням розподілу зарядів у молекулах, він також не залежить від температури.

Сили Ван-дер-Ваальса відіграють суттєву роль у створенні агрегатного стану речовини, бо вони сприяють загальному намаганням всіх молекул наблизитись до себе. Це намагання втілюється під час переходу речовини в конденсований стан – рідкий чи твердий.

15.3. Рівняння стану реального газу (Ван-дер-Ваальса)

Рівняння, яке добре описує стан реальних газів, запропонував 1873 р. голландський фізик Ван-дер-Ваальс. Для 1 моля газу це рівняння має такий вигляд:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT . \quad (15.1)$$

Його можна отримати з рівняння стану ідеального газу, якщо ввести поправку на тиск, яка враховує сили притягання між молекулами газу, і поправку на власний об'єм його молекул, зумовлену силами відштовхування між молекулами.

Поправку на тиск уводять на підставі таких міркувань. Відомо, що сили притягання між молекулами газу дуже швидко зменшуються зі збільшенням відстані між ними. Тому можна вважати, що взаємодія відбувається лише в межах невеликої відстані r_{ef} , яку називають радіусом молекулярної дії.

Подумки виділимо у газі біля самої стінки посудини молекули газу, які містяться у суміжному із стінкою шарі товщиною r_{ef} (рис. 15.2). На ці крайні молекули будуть діяти лише молекули внутрішнього шару газу, внаслідок чого на суміжні із стінкою шари діє додаткова некомпенсована сила, напрямлена до середини газу так, ніби до спостережуваного зовнішнього тиску додається ще деякий тиск P_i . Тому всередині посудини дійсний тиск більший на P_i , ніж той, з яким молекули крайнього шару

діють на стінки посудини. Така дія поверхневого шару особливо яскраво виявляється у рідинах.

Сила f_i притягання молекул крайнього шару молекулами внутрішнього шару пропорційна до квадрата концентрації молекул в обох шарах n^2 , бо кожна молекулу одного шару притягають усі n молекули сусіднього, тому

$$P_i \sim f_i \sim n \cdot n = \frac{N^2}{V^2}.$$

Увівши коефіцієнт пропорційності a , перепишемо цей вираз так:

$$P_i = \frac{a}{V^2}.$$

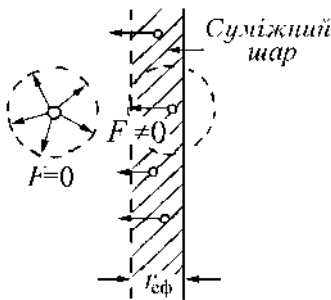


Рис. 15.2. Виникнення внутрішнього тиску в газах

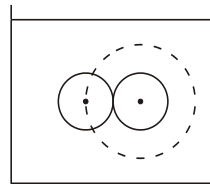


Рис. 15.3. Об'єм, у якому мають змогу рухатися молекули, менший від об'єму посуду

Оцінимо поправку на об'єм молекул. У рівнянні стану ідеального газу об'єм V – це об'єм посудини, у якій можуть рухатися молекули як матеріальні точки. Якщо ж молекули мають власний об'єм, то для їхнього вільного руху залишається вже менший об'єм. Припустимо, що в посудині є лише дві молекули. У русі молекули можуть наблизитися до себе на відстань (між їхніми центрами), що дорівнює діаметру молекул d (рис. 15.3). Це означає, що для центрів обох молекул недоступним є сферичний об'єм радіусом d , тобто $\frac{4}{3} \pi d^3$. З розрахунку на одну молекулу це

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi d^3 = \frac{16}{3} \pi r^3,$$

де r – радіус молекули. Якщо в об’ємі є N_A молекул, то загальний об’єм, недоступний для всіх N_A молекул, буде дорівнювати чотириразовому власному об’єму всіх N_A молекул у посудині. Отже, поправка на об’єм b чисельно дорівнює чотириразовому власному об’єму всіх молекул 1 моля газу. Поправки a і b залежать від хімічної природи речовини.

Для довільної кількості газу рівняння (15.1) записують так:

$$\left(P + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT,$$

де M – маса газу; μ – його молярна маса.

15.4. Ізотерми Ван-дер-Ваальса

Перепишемо рівняння (15.1) так:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P} \right) V^2 + \frac{a}{P} V - \frac{ab}{P} = 0. \quad (15.2)$$

Це рівняння третього степеня відносно об’єму V , воно має три корені, тобто за заданих значень тиску і температури може бути три значення молярного об’єму або, що те саме, три значення густини газу. Теоретичні ізотерми зображено на рис. 15.4. Як бачимо, під час переходу від низьких температур до високих форма кривих ізотерм змінюється і за високих температур, вищих від критичної, форма ізотерми реального газу наближається до форми ізотерми ідеального газу.

З’ясуємо зміст коренів рівняння (15.2). На рис. 15.4 виберемо теоретичну криву ($a b f c g d e$) і порівняємо її з графіком експериментальної ізотерми деякого газу. Щоб отримати експериментальну криву ізотерми, розглянемо такий дослід. У циліндрі (рис. 15.5) міститься газ CO_2 , закритий поршнем. За сталої температури T будемо зменшувати об’єм газу переміщенням поршня. Ми побачимо, що спочатку тиск газу підвищуватиметься так, як на ділянці ab теоретичної кривої. У положенні поршня в точці b починається конденсація газу CO_2 . Якщо об’єм газу далі зменшувати, то його тиск буде сталим, відбуватиметься скраплення газу

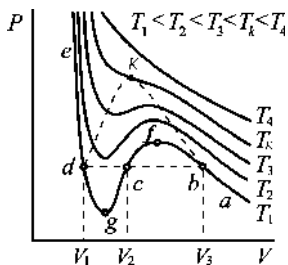


Рис. 15.4. Ізотерми рівняння Ван-дер-Ваальса

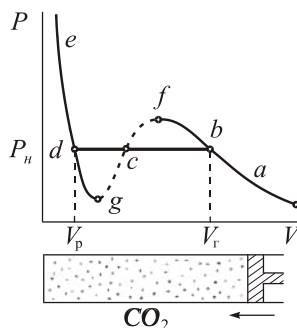


Рис. 15.5. Ізотерма реального газу

аж до точки d . Тиск P_n відповідає тиску насиченої пари рідкої вуглекислоти. У випадку положення поршня в точці d весь газ перетвориться в рідину. Спроби подальшого зменшення об'єму призведуть до стрімкого підвищення тиску в циліндрі, що пояснюють нестисливістю рідини.

Порівняємо теоретичний і експериментальний графіки й побачимо, що повністю відтворюються ділянки ab і de теоретичної кривої. Експериментальний горизонтальний ділянки bd відповідає характерна частина теоретичної кривої $bfcgd$ з максимумом і мінімумом, яка на досліді не виявляється. Окремі ділянки цієї кривої bf і gd можна відтворити за спеціальних умов. Ділянка bf відповідає перенасиченій (переохолодженій) парі. Цей стан можна отримати штучно, якщо об'єм, де міститься газ, швидко охолодити, позбавивши його центрів конденсації (пилінки, іони). За такого стану тиск газу в об'ємі більший від тиску насиченої пари рідини. Внаслідок флуктуації теплового руху молекул цей тиск може знизитися до тиску насиченої пари. Стан, зображений ділянкою dg , називають перегрітою рідиною, там тиск усередині рідини менший від тиску насиченої пари. Такий стан рідини нестійкий, і рідина швидко переходить у нормальний стан. Стани, зображені ділянками bf і gd , називають метастабільними (мають обмежену стійкість). Стану, який відповідав би ділянці теоретичної кривої fg , на досліді не виявлено.

Якщо сполучити всі початки і кінці прямолінійних ділянок усіх ізотерм, (див. рис. 15.4), то отримаємо криву dKb , що обмежує область PV фазової діаграми рівноваги рідини і її пари.

Як бачимо, за температури T_1 всі три корені рівняння (15.2) мають дійсні значення, що відповідають об'ємам V_1 , V_2 , V_3 . З підвищенням температури ці три значення об'ємів наближаються (див. рис. 15.4) і в кінці за критичної температури T_k зливаються в один об'єм V_k , якому на кривій відповідає критична точка K . Виникає **критичний стан**, тобто такий стан речовини, коли втрачена різниця між рідким і газоподібним станами, рідина і пара матимуть однакову густину, в'язкість, стисливість тощо, зник поверхневий натяг, виникли інтенсивні флуктуації густини. Для критичної ізотерми точка K є точкою перегину теоретичної кривої. Критичний стан має критичні параметри V_k , P_k , T_k . Щоб знайти ці параметри, розв'яжемо рівняння Ван-дер-Ваальса стосовно P :

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

Візьмемо першу і другу похідні й прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{dP}{dV} = 0; \quad \frac{d^2P}{dV^2} = 0,$$

отримаємо значення параметрів у критичному стані:

$$V_k = 3b; \quad P_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}.$$

Знаючи сталі Ван-дер-Ваальса a і b , можна знайти критичні об'єм V_k , тиск P_k і температуру T_k 1 моля газу.

Якщо відповідна кількість рідини міститься в критичному для неї об'ємі V_k за температури нижче критичної, то під час її нагрівання рідина спочатку розширюється, її густина зменшується, а густина пари збільшується, і за критичної температури немає різниці між рідиною і парою, її меніск раптово зникає, рідина переходить у критичний стан, заповнюючи весь критичний об'єм. За ще вищої температури речовина перебуває в газоподібному стані і не може бути переведена у рідкий одним лише її стискуванням.

15.5. Властивості насиченої пари

Ділянка, виділена горизонтальною частиною експериментальної ізотерми, яка обмежена об'ємами V_p і V_r (див.

рис. 15.5), стосується рівноваги між рідкою і газоподібною фазами речовини. Газ, який перебуває у рівновазі зі своєю рідиною, називають **насиченою парою**, а тиск, за якого є ця рівновага, – тиском насиченої пари. Пару, що не досягла стану насичення, називають ненасиченою. До ненасиченої пари можна застосовувати всі закони ідеального газу, які виконуються тим точніше, чим далі пара від насичення.

З підвищенням температури тиск насиченої пари підвищується швидше, ніж тиск ненасиченої пари чи ідеального газу (рис. 15.6). Це пояснюють тим, що у випадку насиченої пари тиск підвищується не лише внаслідок інтенсивнішого хаотичного руху молекул, а й з огляду на збільшення концентрації молекул n унаслідок випаровування рідини, тоді як в ідеальному газі концентрація молекул стала. Справді,

$$P = nkT,$$

а концентрація молекул n з підвищенням температури у випадку насиченої пари зростає.

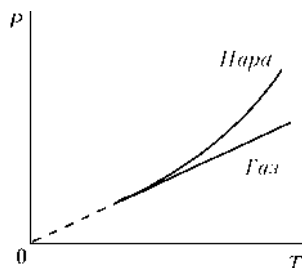


Рис. 15.6. Підвищення тисків насиченої пари та ідеального газу з підвищенням температури відбувається по-різному

15.6. Вологість повітря

На Землі безупинно відбувається кругообіг води. Вона випаровується з поверхні світових океанів, ґрунтів, рослин, а вітри розносять її по всій планеті. Наявність води у складі земної атмосфери зумовлює вологість повітря.

Вологість повітря значно впливає на самопочуття людей. Для нормальної життєдіяльності за добу з поверхні шкіри і легенів людини залежно від різновиду діяльності випаровується від 800 до 2000 г води. У жаркому вологому повітрі процес випаровування води з поверхні шкіри людини послаблюється, водночас порушується і нормальний тепловий обмін в організмі. Тому за великої вологості і високої температури в людини з'являється кволість, зменшується її працездатність тощо.

Вологість, тобто ступінь насичення повітря водяною паром, характеризують такими величинами.

1. Абсолютна вологість повітря визначена масою водяної пари, що міститься в 1 м^3 повітря, тобто її густиною. За низьких температур, коли пара далека від насичення, її можна вважати ідеальним газом і застосовувати до неї рівняння Клапейрона–Менделєєва. У такому разі беруть до уваги парціальний тиск (пружність) водяної пари в повітрі й абсолютну вологість визначають через парціальний тиск P .

2. Відносна вологість повітря f – це відношення абсолютної вологості до тої маси або парціального тиску водяної пари P_{max} , яка насичує повітря за такої ж температури. Переважно це відношення виражають у відсотках:

$$f = \frac{P}{P_{\text{max}}} 100\%.$$

Для визначення вологості повітря застосовують декілька методів, у тому числі й метод точки роси. **Точкою роси називають температуру, за якої наявна в повітрі водяна пара стає насиченою**, що спричинює її конденсацію на охолодженій поверхні.

Абсолютна вологість переважно збільшується з підвищенням температури повітря, бо за такої умови збільшується випаровування води з будь-яких водяних поверхонь. Тому абсолютна вологість у тропіках більша, ніж у помірних чи високих широтах. Максимальна абсолютна вологість, яка сягає близько 3,7 кПа, простежується в Індійському океані.

Відносна вологість з підвищенням температури зменшується, вона менша влітку і більша взимку. У межах України відносна вологість усередньому становить близько 65-75%.

Контрольні запитання

1. Яка природа сил Ван-дер-Ваальса?
2. Який фізичний зміст коефіцієнтів a і b у рівнянні Ван-дер-Ваальса?
3. Що таке критичний стан речовини?
4. Що називають насиченою паром речовини?
5. Чи можна до пари застосовувати рівняння Клапейрона–Менделєєва?
6. Якими величинами характеризують вологість повітря?

Приклади розв'язування задач

15.1. У закритій посудині об'ємом $0,5 \text{ м}^3$ міститься $0,6$ кмоль вуглекислого газу. У скільки разів треба збільшити температуру газу, щоб тиск підвищився удвічі? Газ уважайте реальним. Стала Ван-дер-Ваальса для вуглекислого газу $a=0,364 \text{ Па}\cdot\text{м}^6/\text{моль}^2$.

Розв'язування. Застосуємо рівняння Ван-дер-Ваальса у загальному вигляді для цих двох станів

$$\left(P + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb) = \nu RT_1;$$

$$\left(2P + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb) = \nu RT_2,$$

де ν – кількість вуглекислого газу. Поділимо друге рівняння на перше:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\left(2P + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb)}{\left(P + v^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - vb)} = \frac{2P + v^2 \frac{a}{V^2}}{P + v^2 \frac{a}{V^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6 + \frac{600^2 \cdot 0,364}{0,5^2}}{3 \cdot 10^6 + \frac{600^2 \cdot 0,364}{0,5^2}} = 1,85. \end{aligned}$$

Задачі

15.1. Яку температуру має кисень масою $3,5 \text{ г}$, що міститься в об'ємі 90 см^3 під тиском $2,8 \text{ мПа}$? Газ уважати реальним.

Відповідь: 289 К .

15.2. Знайдіть ефективний діаметр молекули азоту, якщо відомі критичні значення T_K , P_K для азоту.

Відповідь: 312 пм .

15.3. Яка густина водяної пари у критичному стані, якщо відомо, що стала рівняння Ван-дер-Ваальса $b=3,06 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$?

Відповідь: 196 кг/м^3 .

15.4. У скільки разів тиск газу більший від критичного тиску, якщо об'єм і температура удвічі більші від критичних значень цих величин.

Відповідь: $2,45$.

Розділ 15 РЕАЛЬНІ ГАЗИ	289
15.1. Потенціальна крива взаємодії молекул	289
15.2. Поняття про природу сил взаємодії між молекулами.....	291
15.3. Рівняння стану реального газу (Ван-дер-Ваальса)	292
15.4. Ізотерми Ван-дер-Ваальса	294
15.5. Властивості насиченої пари	296
15.6. Вологість повітря	297
Контрольні запитання	298
Приклади розв'язування задач	299
Задачі	299

Розділ 16

ТЕРМОДИНАМІКА. ПЕРШИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ

Термодинаміка – це феноменологічна теорія, яка пояснює явища та властивості тіл на підставі перетворення теплоти в інші види енергії і в роботу. Це наука про теплову рівновагу. Вихідним пунктом термодинаміки були дослідження роботи теплових машин; її застосовують у вивченні фазових переходів, хімічних процесів, поверхневих явищ тощо. Термодинаміка послуговується макроскопічними параметрами системи на основі декількох принципів, не вникаючи в молекулярну будову речовини.

Термодинамічна система – це будь-яке тіло, яке складається з величезної кількості молекул і може обмінюватися із зовнішнім середовищем енергією та масою. Моделлю термодинамічної системи тут вважають ідеальний газ, проте сам метод можна застосовувати й до інших конкретних речовин. У термодинаміці ідеальним називають газ, який підлягає рівнянню газового стану Клапейрона–Менделєєва.

16.1. Способи перенесення теплової енергії

Теплова енергія завжди самочинно переходить від гарячих тіл до холодніших навколишніх. Її перенесення може відбуватися трьома способами: конвекцією, випромінюванням і теплопровідністю. Звичайно ці процеси діють рівночасно, проте питома вага кожного з них різна. За високих температур головну роль відіграє теплоперенесення у формі випромінювання променистої енергії, наприклад, теплопередавання сонячної енергії на Землю. За низьких температур і малих їхніх різниць теплота передається шляхом конвекції і теплопровідності.

Конвекцію пояснюють утворенням у газі або рідині, де є перепад температури, гідродинамічних потоків: теплі маси газу чи рідини внаслідок теплового розширення і зменшення густини, пі-

діймаються вгору, а холодні опускаються вниз. Тут перенесення теплової енергії відбувається разом з перенесенням самої речовини як природними, так і примусовими течіями. Конвекція головню визначає всю динаміку нашої атмосфери, вона є одним із способів домашнього обігрівання.

Будь-яке тіло, особливо нагріте до високої температури, випромінює променисту енергію. Її легко можна відчутти, якщо до цього тіла наблизити долоню: ми чітко відчуємо тепло. За низьких температур тіло випромінює невидимі інфрачервоні промені. З підвищенням температури енергія випромінювання стрімко зростає і за температур близько 500°C тіло світиться червоним світлом. За температури 1200°C колір свічення переходить у яскраво-білий. Якщо це світло розкласти у спектр, то, крім видимих на спектрі кольорових променів, після червоної ділянки спектра за допомогою спеціальних приладів можна виявити невидимі інфрачервоні промені, а з боку фіолетового краю – ультрафіолетові. Всі видимі і невидимі промені переносять променисту енергію, яка, потрапляючи на якесь тіло, поглинається, зумовлюючи його нагрівання.

Третій спосіб передавання теплоти – теплопровідність. Він полягає в тому, що енергію теплового руху від нагрітої частини тіла до холодної передають високоенергетичні молекули внаслідок хаотичного руху під час зіткнень з іншими, низькоенергетичними молекулами. Механізм такої теплопередачі для тіл різної природи різний, тому теплопровідність у них виявляється по-різному. Велику теплопровідність мають метали, меншу – рідини, і зовсім невелику – гази.

У твердих тілах конвекція неможлива, тому перенесення теплової енергії тут відбувається лише за допомогою теплопровідності.

16.2. Оборотні та необоротні процеси

У термодинаміці, крім моделі ідеального газу, використовують також модель ідеального термодинамічного процесу – оборотний процес. **Оборотним** називають процес, який може відбутися у зворотному напрямі з кінцевого стану в початковий через ті самі проміжні стани, що й у прямому, проте в зворотній послідовності так, щоб у навколишньому середовищі не залишилось

жодних змін. Будь-який рівноважний процес оборотний, бо довільний проміжний стан рівноважного процесу є станом термодинамічної рівноваги. Процес, який не задовольняє цих вимог, **необоротний**. Нерівноважний процес необоротний. Прикладом необоротного є тепловий процес. Якщо в контакті перебувають два тіла з різною температурою, то теплота буде переходити від більше нагрітого тіла до менше нагрітого, а зворотний процес – самочинний безпосередній перехід тепла від менше нагрітого до більше нагрітого тіла – ніколи не відбувається. Необоротність реальних процесів зумовлена й силами тертя. Якщо, наприклад, на рухоме тіло діють лише сили тертя, то швидкість тіла поступово зменшується, тіло і навколишнє середовище нагріваються і тіло нарешті зупиняється. Не простежується в природі такого процесу, щоб охолодження тіла спричинило напрямлений рух усього тіла. Необоротним є й процес розширення газу в порожнину. Всі реальні процеси необоротні, бо вони супроводжуються тертям та іншими явищами (дифузія, теплопередача тощо).

Щоб зрозуміти суть оборотного процесу, розглянемо такий дослід. У вертикальному циліндрі під поршнем міститься газ. Над поршнем розташована жорстко з ним скріплена площинка S , біля якої є вертикальний стояк з великою кількістю горизонтальних полицок, розміщених по вертикалі одна над одною (рис. 16.1).

На кожній полиці лежать піщинки. Будемо переносити піщинки по одній з полицок на площинку S поршня так, щоб поршень повільно опускався вниз. Це опускання відбуватиметься так повільно, що в кожен момент часу температура газу дорівнюватиме температурі навколишнього повітря, а тертя практично не буде. Матимемо ізотермічне стиснення газу, бо невелику кількість теплоти під час стиснення газ відразу віддаватиме атмосфері. Оскільки процес відбуватиметься дуже повільно, то газ весь час перебуватиме в термодинамічній рівновазі, між його об'ємом і тиском

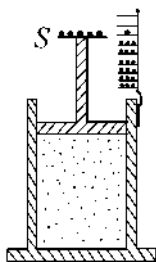


Рис. 16.1. Опускання поршня внаслідок перенесення піщинок з полицок на площинку S пояснює суть оборотного процесу

зберігатиметься співвідношення, задане рівнянням газового стану Клапейрона–Менделєєва

$$PV = \frac{M}{\mu} RT .$$

Після стиснення газу таким же способом можемо виконати зворотний процес: потрібно тільки кожен піщинку перенести з площинки S на полочку, причому так, щоб поршень дуже повільно піднімався вгору і щоб температура газу весь час дорівнювала температурі атмосфери. У кінці поршень повернеться в попереднє положення, вся система пройде через ті самі проміжні стани, що й під час стиснення і після закінчення циклу в навколишньому середовищі не буде жодних змін. Перейшовши до нескінченно малих піщинок і знехтувавши тертям, можна виконати оборотний процес.

Необоротним процес буде, якщо відразу всі піщинки висипати на площинку S поршня. Поршень дуже швидко опуститься вниз, температура і тиск газу не будуть відповідати миттєвому положенню поршня, бо під час руху, безпосередньо перед ним виникне зона підвищеного тиску, крім того, за великої швидкості поршня відчутним стане тертя, стан газу не можна буде характеризувати якимось конкретним значенням тиску й температури, процес буде нерівноважним і необоротним. Прикладом необоротного процесу є вибух.

Звичайну термодинаміку, як науку про теплову рівновагу, можна застосовувати лише до оборотних процесів. Якщо потрібно дослідити якийсь прямий необоротний процес, то його доповнюють оборотним до замкненого циклу, і дослідження цього оборотного процесу (в замкненій системі) дає змогу отримати відомості про перетворення, які відбуваються у системі під час необоротного процесу.

16.3. Внутрішня енергія

Внутрішня енергія термодинамічної системи U – це сума кінетичної і потенціальної енергії молекул, які утворюють систему, а також енергії зв'язку атомів у молекулах. Вона є функцією стану системи. **Функція стану** – це така функція, яка у заданому стані системи має повністю визначене значення, незалежно від

того, яким шляхом або способом систему перевели у цей стан. Інакше кажучи, зміна цієї функції не залежить від виду термодинамічного процесу, а визначена лише крайніми станами. Якщо система виконує замкнений процес, після якого вона повертається до початкового стану, то повна зміна її внутрішньої енергії дорівнює нулю. Цю умову записують у вигляді такої формули:

$$\oint dU = 0 ,$$

де інтеграл беруть по тому шляху, по якому відбувається замкнений процес.

У фізиці цікавляться лише зміною внутрішньої енергії ΔU , а не абсолютним її значенням.

Внутрішню енергію системи можна змінити двома способами: виконуючи над системою певну роботу, наприклад, стискуванням газу, унаслідок чого він буде нагріватися, або надаючи їй певну кількість теплоти, тобто кількість теплової енергії (енергії теплового руху молекул), що переходить від тіла 1 до тіла 2 під час теплового контакту. Робота супроводжується переміщенням одних частин макроскопічного тіла відносно інших з нагріванням усього тіла, тобто передаванням енергії від одного тіла до іншого впорядкованим рухом. Надання тілу певної кількості теплоти не пов'язане з макроскопічним переміщенням зовнішніх тіл, тобто упорядкованим рухом. Лише окремі молекули “гарячого” тіла у контакті з іншим тілом передають під час зіткнень молекулам холодного тіла частину своєї кінетичної енергії хаотичного руху, що приводить до збільшення внутрішньої енергії тіла. Макроскопічна робота у цьому процесі не виконується. Отже, робота і теплота – різні форми передавання енергії від одного тіла до іншого. Робота – це передавання енергії упорядкованим рухом макротіла, а теплота – неупорядкованим хаотичним рухом молекул.

16.4. Перший принцип термодинаміки

Закон збереження механічної енергії справджується лише для консервативних систем. Якщо в системі діють дисипативні сили, то частина механічної енергії перетворюється у теплову, тобто у внутрішню енергію тіл. Досвід засвідчує, що відповідно до загального закону збереження енергії зміна внутрішньої енер-

гії системи завжди дорівнює сумі виконаної над системою роботи і переданої їй кількості теплоти:

$$dU = \delta Q + \delta A', \quad (16.1)$$

де A' – робота зовнішніх сил над системою. Якщо замість роботи зовнішніх сил A' ввести однакову з нею за значенням, але з протилежним знаком роботу A , яку виконує система, то рівняння (16.1) виглядатиме так:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

і відображатиме закон збереження енергії в термодинаміці, який називають **першим принципом термодинаміки**. *Кількість теплоти, наданої системі, витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи і виконання системою роботи.* Це загальніша форма закону збереження і перетворення енергії. Відмінність цього закону від закону збереження у механіці полягає в тому, що тут маємо величину δQ , яку називають нескінченно малою кількістю теплоти, а δA – це елементарна робота. Фізичний зміст цього закону такий: внутрішню енергію системи можна змінити шляхом надання системі певної кількості теплоти і виконанням роботи над системою.

Запис dU означає повний диференціал, бо внутрішня енергія U – це функція стану системи; вирази δQ і δA не є повними диференціалами, тобто не є функціями стану системи.

16.5. Внутрішня енергія ідеального газу

Щоб знайти внутрішню енергію 1 моля ідеального газу, треба середню енергію хаотичного поступального руху молекул помножити на кількість молекул 1 моля газу, тобто на число Авогадро:

$$U = \frac{3}{2} k T N_A = \frac{3}{2} R T .$$

Потенціальної енергії взаємодії між молекулами в ідеальному газі нема, тому ми її не враховували. Для довільної маси M газу

$$U = \frac{M}{\mu} \frac{3}{2} R T = \nu \frac{3}{2} R T ,$$

де ν – кількість речовини.

Для загального випадку формула має такий вигляд:

$$U = \nu \frac{i}{2} RT , \quad (16.2)$$

де i – число ступенів вільності молекул газу.

16.6. Робота в термодинаміці

У механіці робота визначена дією сили на рухоме тіло, тобто зміною кінетичної енергії тіла. У термодинаміці розглядають переміщення лише окремих частин макроскопічного тіла, наприклад, зміну об'єму тіла внаслідок його стискання, що супроводиться зміною внутрішньої енергії тіла. Тут швидкість тіла як цілого дорівнює нулю. Тому робота в термодинаміці визначена зміною не кінетичної енергії тіла, а його внутрішньої енергії.

Розглянемо газ, який міститься в циліндрі, закритому рухо- мим поршнем площею S , під тиском P . Якщо газу надавати певну кількість теплоти ΔQ , то він буде нагріватися і розширюватися. Припустимо, що процес відбуватиметься дуже повільно, поршень переміщатиметься на нескінченно малу відстань dl так, що тиск всередині циліндра буде сталий і дорівнюватиме P . Газ діє на поршень з силою $F = PS$. Переміщенню поршня протидіє зовніш- ня сила, і на її подолання газ виконує роботу

$$\delta A = Fdl = PSdl = PdV .$$

Виявляється, що формула роботи, виконаної газом проти зовнішньої сили, справджується не тільки для газів, а взагалі для будь-якого тіла, яке виконує повільний процес теплового роз- ширення, тобто рівноважний процес. Увесь процес розши- рення газу можна зобразити графічно в координатах PV .

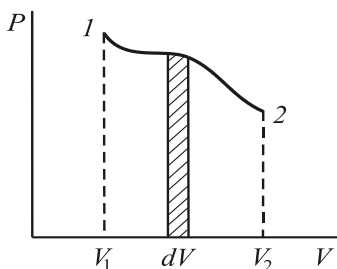


Рис. 16.2. Графічне зобра- ження елементарної роботи газу (заштрихована ділянка)

Побудувавши такий графік (рис. 16.2), побачимо, що добу- ток PdV дорівнює площі за- штрихованої криволінійної тра- пеції. Тоді вся робота розширен- ня газу від стану 1 до стану 2

буде відображена інтегралом

$$A = \int_1^2 P dV ,$$

тобто дорівнюватиме всій площі між кривою і віссю абсцис, що відповідає зміні об'єму газу від V_1 до V_2 і формі кривої, яка характеризує процес.

16.7. Теплоємність газу

З метою вивчення теплових властивостей речовин вводять поняттям теплоємності. Цю величину характеризує кількість теплоти, яку треба надати тілу, щоб його нагріти на 1 К. Для різних речовин вона різна, проте не може бути характеристикою речовини, бо залежить від різновиду термодинамічного процесу, під час якого тілу надається певна кількість теплоти. Найбільше значення має теплоємність в ізохорному та ізобарному процесах. Розглянемо це детальніше.

1. Ізохорний процес ($V = \text{const}$). За сталого об'єму будемо надавати системі певну кількість теплоти. Запишемо перший принцип термодинаміки:

$$\delta Q = dU + \delta A .$$

Тут робота зовнішніх сил дорівнює нулю, бо $dV = 0$:

$$\delta A = P dV = 0 .$$

Отже,

$$\delta Q = dU .$$

Уведемо поняття молярної теплоємності: **молярна теплоємність** за сталого об'єму C_V – це фізична величина, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яку треба надати 1 молю речовини за сталого об'єму, щоб підвищити її температуру на 1 К. За означенням

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V ,$$

тобто

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V . \quad (16.3)$$

Оскільки dU є повним диференціалом, то молярна теплоємність за сталого об'єму C_V , так само як і внутрішня енергія U , є функція стану системи. Для C_V маємо вираз

$$C_V = \frac{d\left(\frac{i}{2}RT\right)}{dT} = \frac{i}{2}R.$$

Як бачимо, молярна теплоємність газу залежить від числа ступенів вільності молекул газу. На підставі (16.3) для внутрішньої енергії ідеального газу можемо записати

$$dU = C_V dT, \quad (16.4)$$

а повна зміна внутрішньої енергії під час переходу системи зі стану 1 у стан 2

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 C_V dT = C_V (T_2 - T_1).$$

Отже, внутрішня енергія ідеального газу залежить лише від температури газу.

2. Ізобарний процес ($P = \text{const}$). До системи за сталого тиску будемо підводити певну кількість теплоти.

За першим принципом термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV.$$

Молярна теплоємність за сталого тиску визначена кількістю теплоти, яку треба надати одному молу речовини, щоб її за сталого тиску нагріти на 1 К:

$$C_P = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_P,$$

звідки

$$C_P dT = \delta Q = dU + PdV = d(U + PV) = dH, \quad (16.5)$$

тут

$$H = U + PV.$$

Функцію H називають **ентальпією системи**. Вона, як впливає з (16.5), також є функцією стану системи (повним диференціалом).

Знайдемо зв'язок між C_V і C_P . На підставі рівняння (16.5) маємо

$$C_p dT = C_v dT + PdV . \quad (16.6)$$

Доданок PdV визначимо з рівняння стану ідеального газу. Продиференціювавши його, отримаємо

$$PdV = RdT , \quad (P = \text{const}).$$

Підставимо вираз для PdV у рівняння (16.6):

$$C_p dT = C_v dT + RdT .$$

Звідси

$$C_p = C_v + R .$$

Цей вираз називають **рівнянням Майєра**. Оскільки $C_v = i/2 \cdot R$, то

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R .$$

Молярна теплоємність за сталого тиску C_p більша від молярної теплоємності за сталого об'єму C_v , бо під час ізобарного нагрівання теплота витрачається не лише на збільшення хаотичного руху молекул газу, а й на виконання газом роботи проти зовнішніх сил.

16.8. Залежність теплоємності газу від температури

Молярні теплоємності C_p і C_v визначені числом ступенів вільності молекул та універсальною сталою газу i , здавалося б, не повинні залежати від температури.

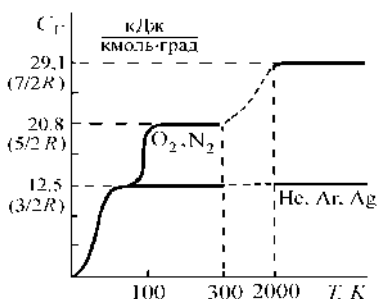


Рис. 16.3. Графік залежності C_v деяких газів від температури

Наприклад, $C_v = 3/2 R$ для одноатомного газу і $C_v = 5/2 R$ – для двоатомного. Проте дослід ісвідчує, що для деяких газів, априклад, водню, кисню, азоту, молярна теплоємність з підвищенням температури збільшується від 0 до $7/2 R$ (двоатомні гази, рис. 16.3). Таку залежність теплоємності від температури класична фізика пояснити не може.

Квантова фізика пояснює це тим, що з підвищенням температури збільшується число ступенів вільності молекул. Енергія поступального руху молекул може змінюватися лише безперервно, а енергія збудження додаткових ступенів вільності молекул (обертальних і коливальних рухів) квантована, тобто дискретна. Вона невелика для збудження обертальних ступенів вільності і в сто разів більша для коливальних. За низьких температур тепловий рух двохатомної молекули подібний до теплового руху одноатомної з трьома ступенями вільності. Теплової енергії поступального руху молекул $3/2 kT$ не вистачає, щоб під час зіткнень зумовити обертальний рух молекул. З підвищенням температури збільшується кількість молекул, середня енергія яких достатня для збудження двох обертальних ступенів вільності, і теплоємність двохатомної молекули C_V зростає до $5/2 R$. Це настає тоді, коли енергія поступального руху молекул стає більша від порогового значення енергії збудження обертальних ступенів вільності. За ще вищих температур з'являються ще два ступені вільності, які характеризують внутрішньомолекулярні коливання атомів. На ці додаткові ступені вільності припадає кінетична і потенціальна енергії коливального руху, і тому молярна теплоємність C_V збільшується до $7/2 R$. Це настає за таких високих температур, коли енергія теплового руху молекул достатня для збудження коливального руху атомів у молекулі.

За високих тисків, коли властивості газів відрізняються від властивостей ідеального газу й виникає взаємодія між молекулами, збільшується і його теплоємність.

16.9. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона

Процес, який відбувається без теплообміну системи з навколишнім середовищем і в якому змінюються всі три параметри системи – тиск P , об'єм V і температура T , – називають адіабатним. Отже, теплота до системи не надходить, тобто для такого процесу

$$\delta Q = 0.$$

Перший принцип термодинаміки для цього процесу виглядає так:

$$dU + \delta A = 0,$$

або

$$C_V dT + PdV = 0. \quad (16.7)$$

Виведемо рівняння, яке пов'язувало б між собою параметри P і V системи в адіабатному процесі (рівняння Пуассона). З рівняння (16.7) вилучимо температуру. З цієї метою спочатку продиференціюємо рівняння стану ідеального газу $PV=RT$:

$$VdP + PdV = RdT,$$

і визначимо звідси dT :

$$dT = \frac{PdV + VdP}{R}.$$

З рівняння Майєра маємо

$$R = C_P - C_V.$$

Отже,

$$dT = \frac{PdV + VdP}{C_P - C_V}.$$

Підставимо вираз для dT у рівняння (16.7):

$$PdV + \frac{C_V(PdV + VdP)}{C_P - C_V} = 0.$$

Перетворимо останній вираз так:

$$C_P PdV - C_V PdV + C_V PdV + C_V VdP = 0.$$

Після скорочення

$$C_P PdV + C_V VdP = 0.$$

Поділимо почленно це рівняння на PV :

$$C_P \frac{dV}{V} + C_V \frac{dP}{P} = 0.$$

Ще раз поділимо почленно на C_V :

$$\frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0.$$

Позначимо $C_P/C_V = \gamma$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Це рівняння легко проінтегрувати, якщо згадати, що $d \ln x = \frac{dx}{x}$.

На підставі цього останнє рівняння можна записати в такому вигляді:

$$d \ln(PV^\gamma) = 0,$$

звідки остаточно отримуємо **рівняння Пуассона**:

$$PV^\gamma = \text{const}.$$

Криву, побудовану за цим рівнянням у координатах PV , називають адіабатою. Якщо порівняти криву адіабати з кривою ізотерми (закон Бойля–Маріотта: $PV = \text{const}$), то, оскільки $\gamma > 1$, адіабата спадає крутіше до осі об'ємів, ніж ізотерма (рис. 16.4). Це пояснюють тим, що під час адіабатного розширення газу зниження тиску зумовлене не лише збільшенням його об'єму, а й охолодженням.

Рівняння адіабати можна записати у змінних VT або PT , скориставшись рівнянням Клапейрона–Менделєєва. Зробимо таку заміну й отримаємо

$$TV^{\gamma-1} = \text{const},$$

або

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}.$$

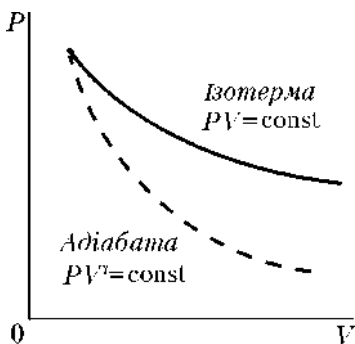


Рис. 16.4. Порівняння графіків процесів ізотермічного (суцільна лінія) та адіабатного (штрихова лінія)

Адіабатний процес, як і інші, які ми розглядаємо, є оборотним, проте його важко отримати на практиці, бо в природі нема матеріалів, які забезпечували б тривалу теплову ізоляцію системи під час дуже повільного такого процесу. Тому реальний адіабатний процес треба проводити так швидко, щоб не відбулось теплообміну між термодинамічною системою і навколишнім середовищем. З іншого боку, швидкість процесу не може бути дуже великою, бо процес повинен бути оборотним. Наприклад,

так відбувається в циліндрах дизельних двигунів, де повітря внаслідок швидкого стискання нагрівається до високої температури, охолоджується фреон у холодильних установках унаслідок його розширення. Адіабатне охолодження відбувається в атмосфері Землі, коли нагріте повітря, швидко піднімаючись вгору, розширюється, в результаті чого водяна пара конденсується й утворюються хмари.

16.10. Політропний процес

Політропним називають оборотний газовий процес, у ході якого змінюються всі три параметри системи і відбувається деякий теплообмін системи з навколишнім середовищем. Сталою у такому процесі є теплоємність газу.

Знайдемо рівняння політропи. Будемо виходити з першого принципу термодинаміки для 1 моля ідеального газу:

$$\delta Q = C dT = C_V dT + P dV ,$$

або

$$(C - C_V) dT = P dV , \quad (16.8)$$

де C – теплоємність газу в політропному процесі. Вилучимо з цього рівняння температуру. Для цього продеференціюємо рівняння Клапейрона–Менделєєва $PV = RT$:

$$P dV + V dP = R dT$$

і визначене звідси dT підставимо в рівняння (16.8). У результаті отримаємо:

$$(C - C_V)(P dV + V dP) = R P dV = (C_P - C_V) P dV .$$

Згрупуємо відповідні члени:

$$(C - C_P) P dV = (C_V - C) V dP = -(C - C_V) V dP ;$$

$$\frac{C - C_P}{C - C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 . \quad (16.9)$$

Уведемо поняття показника політропи n :

$$n = \frac{C - C_P}{C - C_V} .$$

Тоді рівняння (16.9) набуде вигляду

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (16.10)$$

Маючи на увазі, що $d \ln x = dx/x$, рівняння (16.10) можна записати у вигляді

$$d \ln(PV^n) = 0,$$

звідки остаточно

$$PV^n = \text{const}.$$

Це рівняння політропи. Всі інші газові процеси впливають з політропного процесу як окремі випадки: якщо $n = \infty$, то процес буде ізохорним, якщо $n = 0$ – ізобарним, якщо $n = 1$ – ізотермічним, за умови, що $n = C_p/C_v$, – адіабатним.

Рівняння політропи можна записати в змінних VT або PT , скориставшись під час перетворення рівнянням Клапейрона–Менделєєва.

Політропні процеси мають важливе значення, – на практиці маємо справу саме з ними.

16.11. Робота ідеального газу в різних процесах

Робота, яку виконує газ, коли змінюється його стан, залежить не лише від його початкового і кінцевого стану, а й від процесу, який виконує цей перехід. Знайдемо формули роботи ідеального газу в найпростіших процесах.

1. Ізохорний процес. Тут $V = \text{const}$, $dV = 0$, тому робота газу $\delta A = PdV = 0$,

і перший принцип термодинаміки для цього процесу запишемо так:

$$\delta Q = dU.$$

Отже, кількість теплоти, надана газові під час його ізохорного нагрівання, витрачається лише на збільшення внутрішньої енергії газу.

2. Ізобарний процес. $P = \text{const}$.

Для роботи газу маємо вираз

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1).$$

Скористаємось рівнянням стану $PV = RT$ і зробимо заміну; отримаємо таку формулу для роботи 1 моля ідеального газу в ізобарному процесі:

$$A = R(T_2 - T_1) .$$

З цієї формули випливає фізичний зміст універсальної газової сталої R : *універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі, яку виконує 1 моль газу під час його ізобарного нагрівання на 1 К.*

3. Ізотермічний процес. $T = \text{const.}$

У загальному випадку

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV .$$

Вилучимо з цього рівняння тиск. Для цього підставимо у формулу вираз для тиску з рівняння стану Клапейрона–Менделєєва:

$$P = \frac{RT}{V} ,$$

тоді для роботи 1 моля ідеального газу під час його ізотермічного розширення отримаємо вираз

$$A = \int_{V_1}^{V_2} RT \frac{dV}{V} = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Оскільки у цьому процесі $T = \text{const.}$, то і внутрішня енергія газу U стала. Роботу виконує газ лише завдяки тій кількості теплоти, яку підводять ззовні.

4. Адіабатний процес. $\delta Q = 0$.

Запишемо перший принцип термодинаміки для адіабатного процесу:

$$0 = dU + PdV = C_v dT + PdV ,$$

тобто

$$\delta A = PdV = -C_v dT ,$$

звідки

$$A = \int PdV = - \int_{T_1}^{T_2} C_v dT .$$

Звідси випливає таке: якщо ідеальний газ під час адіабатного розширення виконує роботу, то він охолоджується. Робота такого розширення

$$A = -C_V(T_2 - T_1). \quad (16.11)$$

Знак мінус у цій формулі означає, що роботу газ виконує завдяки зменшенню внутрішньої енергії.

Формулу (16.11) можна переписати інакше. Перетворимо вираз для γ так:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}.$$

Звідси визначимо C_V і підставимо у формулу (16.11):

$$A = C_V(T_1 - T_2) = \frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2).$$

Замінімо R з рівняння стану:

$$A = \frac{PV_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Адіабатне розширення газу з виконанням роботи часто застосовують для охолодження газу, наприклад, у холодильних машинах.

16.12. Внутрішня енергія реального газу

Внутрішня енергія ідеального газу – це сума кінетичних енергій теплового руху всіх його молекул, для 1 моля вона дорівнює $U = C_V T$. У випадку реального газу його внутрішня енергія є сумою кінетичної енергії хаотичного руху молекул і потенціальної енергії взаємодії між ними:

$$U = W + \Pi.$$

Виявляється, що потенціальна енергія взаємодії молекул Π є функцією від об'єму газу. Справді, під час розширення реального газу збільшується відстань між молекулами, що взаємодіють, і потрібно виконати певну роботу на подолання сил притягання між молекулами під час розведення їх на деяку відстань. Сили притягання між молекулами характеризуємо внутрішнім тиском

$P_i = a/V^2$, тому для потенціальної енергії взаємодії, яка чисельно дорівнює роботі розведення молекул, можемо записати

$$d\Pi = P_i dV = \frac{a}{V^2} dV ;$$

і

$$\Pi = \int \frac{a}{V^2} dV = -\frac{a}{V} + C .$$

Якщо $V \rightarrow \infty$, то $C \rightarrow 0$, і для внутрішньої енергії 1 моля реального газу, яка дорівнює сумі кінетичної енергії хаотичного руху молекул і потенціальної енергії взаємодії між ними, отримаємо формулу

$$U = C_V T - \frac{a}{V} . \quad (16.12)$$

Отже, **внутрішня енергія реального газу залежить не лише від температури, а й від об'єму**. Зазначимо, що величина C_V для всіх реальних газів, крім водню, за температур до 1500°C така сама, як для ідеального газу.

З формули (16.12) впливає цікавий факт – під час ізотермічного розширення реального газу його внутрішня енергія збільшується.

16.13. Ефект Джоуля–Томсона (адіабатне розширення реального газу)

Якщо ідеальний газ адіабатно розширювати з виконанням ним роботи, то цю роботу газ виконуватиме завдяки зменшенню внутрішньої енергії і, отже, його температура буде знижуватися. Якщо ж під час адіабатного розширення він не виконує роботи (розширення в порожнину), то його температура не змінюється. Під час адіабатного розширення реального газу без виконання ним роботи його внутрішня енергія згідно з першим принципом термодинаміки повинна бути сталою:

$$U = C_V T - \frac{a}{V} = \text{const}.$$

Це означає, що у такому разі він завжди повинен охолоджуватися. Численні досліди засвідчили, що реальний газ під час аді-

абатного розширення може охолоджуватися або нагріватися залежно від умов експерименту.

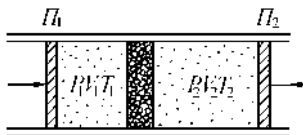
Уперше це явище дослідили Джоуль і Томсон у 1853–1854 рр. Щоб домогтися не бурхливого, а пригальмованого адіабатного розширення газу, вони пропускали його крізь пористу перегородку в теплоізольованій трубі з перепадом тиску, внаслідок чого газ, пройшовши перегородку, розширювався. Таке розширення ідеального газу з перепадом тиску (дроселювання) не супроводжується зміною температури, бо робота, виконана над газом під час його проштовхування крізь пори, дорівнює роботі, виконаній газом за перегородкою внаслідок руху поршня. Температура реального газу в такому експерименті, як виявилось, змінювалась.

Явище зміни температури реального газу під час його дроселюваного адіабатного розширення називають ефектом Джоуля–Томсона. Пояснимо природу цього явища. Внутрішня енергія реального газу складається з суми кінетичної енергії теплового руху молекул і потенціальної енергії взаємодії молекул. Крива залежності потенціальної енергії від відстані між молекулами має мінімум, якому відповідає відстань r_0 між молекулами (див. рис. 15.1). Якщо відстань між молекулами $r' < r_0$, то вони відштовхуються, якщо ж $r'' > r_0$, – вони притягаються. Оскільки в газі молекули швидко рухаються, то їхню взаємодію можна характеризувати середньою потенціальною енергією і середньою відстанню між ними. Середня відстань між молекулами, що взаємодіють, залежить від густини газу: що більша густина, то менша середня відстань між молекулами. Вона залежить і від температури, бо чим вища температура, тим більша кінетична енергія молекул і під час взаємодії вони підходять на ближчі відстані, тобто порівняно більше часу проводять на близьких відстанях. Якщо адіабатне розширення газу (зменшення тиску) робити тоді, коли середня відстань між молекулами $r' < r_0$, тобто коли у взаємодії молекул переважають сили відштовхування, то під час такого розширення швидкості молекул будуть збільшуватися, газ нагріватиметься, (потенціальна енергія буде зменшуватися, а кінетична – збільшуватися). Якщо ж середня відстань між молекулами $r'' > r_0$, і домінують сили притягання між молекулами, то під час розширення газ буде охолоджуватися (бо потенціальна енергія збільшуватиметься завдяки зменшенню кінетичної). Зміна температури газу в разі його нескінчено малого

адіабатного розширення, тобто під час зміни тиску газу на мале значення, називають диференціальним ефектом Джоуля–Томсона. Інтегральний (сумарний) ефект Джоуля–Томсона, тобто зміна температури газу за скінченний перепад тиску може супроводжуватися як підвищенням температури, коли перед розширенням газу між молекулами переважають сили відштовхування, так і охолодження, якщо в газі перед його розширенням домінують сили притягання.

Отже, під час розширення газу за незмінної його енергії маємо перехід кінетичної складової внутрішньої енергії газу в потенціальну і навпаки. Перехід потенціальної енергії в кінетичну зумовлює нагрівання газу, обернений процес – охолодження. У реальному газі обидва ефекти фіксують одночасно.

Рис. 16.5. Схема приладу в досліді Джоуля–Томсона



Розглянемо ідею досліду Джоуля–Томсона. Газ міститься в теплоізольованій трубі (рис. 16.5), розділеній пористою перегородкою (у перших дослідах – корок з вати). Просуванням поршнів зліва направо в об'ємах V_1 і V_2 створюють, відповідно, тиски P_1 і $P_2 < P_1$, тому газ буде просочуватися через пористу перегородку зліва направо. Температуру газу в обох частинах приладу T_1 і T_2 вимірюють термометрами, тиски P_1 і P_2 підтримують сталими шляхом безперервного просування поршнів. Та сама маса газу перед перегородкою і через деякий час за нею займає об'єми, відповідно, V_1 і $V_2 > V_1$. Розширення відбувається без теплообміну як між газами в об'ємах V_1 і V_2 через пористу перегородку, так і з навколишнім середовищем (адіабатно).

Робота газу складається з додатної, виконаної газом під час руху поршня P_2 , і від'ємної, виконаної над газом внаслідок переміщення поршня P_1 . Застосовавши перший принцип термодинаміки для цього адіабатного процесу побачимо, що ефект Джоуля–Томсона відбувається за сталої ентальпії. На підставі цього і, вважаючи газ у великому об'ємі V_2 ідеальним, можна довести,

що зміна температури 1 моля реального газу в інтегральному ефекті Джоуля–Томсона

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_p} \left(\frac{RT_1 b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right),$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса.

Зміна знаку ефекту відбувається в точках, для яких $\Delta T=0$, тобто

$$RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} = 0,$$

звідки

$$T_1 = \frac{2a}{Rb} \left(1 - \frac{b}{V_1} \right). \quad (16.13)$$

Рівнянню (16.13) відповідає в координатах T_1, V_1 крива інверсії інтегрального ефекту Джоуля–Томсона (рис. 16.6), тобто

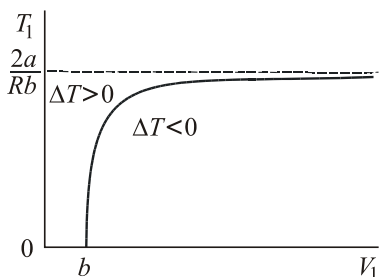


Рис. 16.6. Крива інверсії ефекту Джоуля–Томсона

значення T_1 і V_1 , за яких $\Delta T=0$.

Для дуже розрідженого газу ($V_1 \rightarrow \infty$) температура інверсії дорівнює $2a/Rb$. За великої густини газу (малого об'єму V_1) температура інверсії низька. Точкам, які лежать на площині $(T_1 V_1)$ вище від кривої інверсії, відповідає від'ємний ефект ($\Delta T > 0$), тобто нагрівання газу під час його адіабатного розширення, а точкам нижче

кривої інверсії – позитивний ефект ($\Delta T < 0$). Отже, **знак і значення ефекту залежить від початкової температури газу і його початкового об'єму (тиску)**. Якщо $T_1 > 2a/Rb$, то ефект завжди від'ємний, а якщо $T_1 < 2a/Rb$, то ефект позитивний лише за досить великого початкового об'єму V_1 (тобто за досить малого початкового тиску, малої густини газу).

Для більшості газів температура інверсії набагато вища від кімнатної, тому вони у явищі Джоуля–Томсона охолоджуються. Темпе-

ратура інверсії водню, гелію й аргону значно нижча від кімнатної, і вони в процесі Джоуля–Томсона нагріваються.

16.14. Зрідження газів

Щоб зрідити газ за допомогою ізотермічного стискання, його температура повинна бути нижче критичної. З технічного і практичного поглядів газу ліпше зріджувати за атмосферного тиску. Проте критична температура багатьох газів дуже низька, тому для зрідження їх треба ще охолоджувати, а це завдання досить складне.

У техніці для охолодження газу застосовують ефект Джоуля–Томсона. З установок для зрідження газів, дія яких ґрунтується на цьому принципі, найвідоміша машина Лінде (рис. 16.7), її дію схематично можна описати так. Газ, стиснений компресором K до високого тиску (~ 200 атм.), через впускний клапан надходить у попередній холодильник X і далі по вузькій внутрішній трубці в теплообмінник T , у якому застосовано принцип протипотоку: стиснений у компресорі газ проходить по внутрішній спіральній трубці теплообмінника, на виході з її нижнього кінця D , розширюючись, охолоджується (дроселювання), і знову повертається у теплообмінник вверх по ширшій зовнішній трубці. Тут він охолоджує свіжі порції стисненого газу, який проходить по внутрішній трубці йому назустріч до її нижнього кінця. За такою схемою газ безперервно охолоджується, доки не відбудеться його зрідження.

У стаціонарному режимі роботи машини частина газового потоку під час дроселювання зріджується і збирається на дні посудини, тоді як інша, не зріджена його частина, охолоджуючи стиснений у внутрішній трубці газ, знов проходить через теплообмінник і повертається

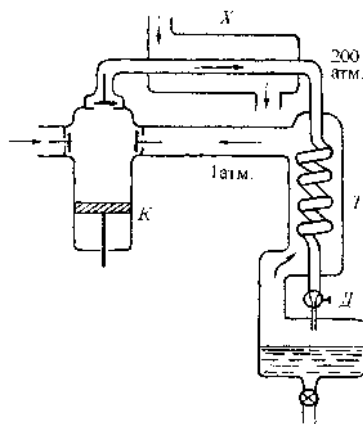


Рис. 16.7. Схема машини Лінде для зрідження газів

до компресора, який стискає цей газ і подає у внутрішню трубку теплообмінника.

Частіше застосовують ефективніші машини для зрідження газу – детантери (**машини Клода**), у яких газ охолоджується не лише внаслідок адіабатного розширення, а й унаслідок виконання ним роботи, наприклад, обертаючи турбіну (турбодетантер Капіці).

Зріджені гази часто використовують для отримання низьких температур. Температури кипіння деяких газів за атмосферного тиску такі, °С: кисень –183; аргон –186; азот –196; водень –253; гелій –269. Якщо знизити тиск, за якого кипить зріджений газ, можна його ще більше охолодити і досягти його затвердіння. Випаровуючи водень, можна досягти температури 14 К, а випаровуючи гелій – 0,7 К. З рідкого повітря шляхом фракційного випаровування (температура кипіння рідкого повітря $t = -180^{\circ}\text{C}$) отримують головні складові компоненти атмосферного повітря: кисень, азот, інертні гази. Передусім з рідкого повітря випаровується азот і залишається кисень. Таким же способом отримують з повітря зріджені азот та інертні гази.

Рідке повітря в суміші з такими органічними матеріалами, як нафта, товчене вугілля, утворює вибухову речовину, яку застосовують у підривних роботах (у шахтах, дорожньому будівництві тощо).

За дуже низьких температур виявляється багато незвичайних властивостей речовин, наприклад, надпровідність деяких матеріалів, надплинність гелію тощо.

Контрольні запитання

1. Яка причина необоротності реальних термодинамічних процесів?
2. Якими способами можна змінити внутрішню енергію тіла?
3. Яка важлива властивість функції стану?
4. Який перший принцип термодинаміки?
5. Чому $C_p > C_v$?
6. Чому крива адіабати спадає крутіше від кривої ізотерми під час збільшення об'єму?
7. Який фізичний зміст універсальної газової сталої R ?
8. Чому внутрішня енергія реального газу залежить від об'єму?
9. У чому суть явища Джоуля–Томсона?

Приклади розв'язування задач

16.1. Одноатомному газу, який міститься у циліндрі з рухомих поршнем, надано 900 Дж теплоти. Знайдіть роботу газу, якщо газ діяв на поршень зі сталою силою.

Розв'язування. За першим принципом термодинаміки $Q = \Delta U + A$. Оскільки процес розширення газу ізобарний, то $A = P\Delta V = \nu R\Delta T$, де ν – кількість газу. Зміна внутрішньої енергії

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \nu i / 2 \cdot R\Delta T.$$

Отже,

$$Q = \nu \frac{i}{2} R\Delta T + \nu R\Delta T = \nu R\Delta T \left(\frac{i}{2} + 1 \right) = \frac{i+2}{2} A.$$

Для одноатомного газу $i=3$, тому для роботи отримаємо вираз

$$A = \frac{2Q}{i+2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 900}{3+2} = 360 \text{ Дж}.$$

16.2. Один кіломоляр азоту, який перебуває в нормальних умовах, адіабатно розширюється від V_1 до $V_2=2V_1$. Знайдіть зміну внутрішньої енергії газу і виконану роботу.

Розв'язування. Запишемо перший принцип термодинаміки: $Q = \Delta U + A$. Процес адіабатний, тобто $Q = 0$ і $\Delta U = -A$, а

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \nu \frac{i}{2} R(T_2 - T_1).$$

Для визначення T_2 застосуємо рівняння Пуассона:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}, T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_1;$$

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_1 - T_1 \right].$$

Отже,

$$A = -\Delta U = \nu \frac{i}{2} RT_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 10^3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot 300 (1 - 5^{-0,4}) = 2,93 \text{ МДж}.$$

16.3. Азот масою 10 кг адіабатно розширюється від об'єму $V_1=1 \text{ м}^3$ до $V_2=2 \text{ м}^3$. Уважаючи газ реальним, знайдіть зміну температури під час такого розширення. Стала Ван-дер-Ваальса для азоту $a=1,36 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{кмоль}^2$.

Розв'язування. Під час адіабатного розширення газу в порожнину він роботи не виконує, тому його внутрішня енергія згідно з першим принципом термодинаміки є сталою:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad \delta Q = 0. \quad \delta A = 0, \quad \text{отже, } dU = 0, \quad U = \text{const.}$$

Для деякої маси M ван-дер-ваальсівського газу внутрішня енергія

$$U = C_V T - \frac{Ma}{\mu V},$$

де μ – молярна маса газу. Оскільки внутрішня енергія у початковому і кінцевому станах однакова, то отримаємо

$$C_V T_1 - \frac{Ma}{\mu V_1} = C_V T_2 - \frac{Ma}{\mu V_2}. \quad \text{Однак } C_V = \frac{i}{2} R,$$

тому для азоту з двохатомними молекулами маємо

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 = \Delta T &= \frac{2}{5R} \frac{Ma}{\nu} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,36 \cdot 10^5}{5 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 28} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1} \right) = -1,17 \text{ K.} \end{aligned}$$

Задачі

16.1. Знайдіть питому теплоємність кисню за сталого об'єму і сталого тиску.

Відповідь: $C_V = 650 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$; $C_P = 910 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$.

16.2. Чому дорівнює ступінь дисоціації азоту, якщо відомо, що C_P/C_V для нього дорівнює 1,47?

Відповідь: 23%.

16.3. Яку кількість теплоти треба надати 12 г кисню, щоб нагріти його на 50°C за сталого тиску?

Відповідь: 545 Дж.

16.4. Водень (6,5 г), температура якого 27°C , розширюється вдвічі за сталого тиску внаслідок надходження теплоти ззовні. Знайдіть: 1) роботу розширення; 2) зміну внутрішньої енергії; 3) кількість теплоти, отриманої газом.

Відповідь: $A = 8,1 \text{ кДж}$; $\Delta U = 20,2 \text{ кДж}$; $Q = (20,2 + 8,1) \text{ кДж}$.

16.5. Під час адіабатного стискання 1 кіломоля двохатомного газу була виконана робота 146 кДж. На скільки збільшилась температура газу?

Відповідь: 7 К.

Розділ 16 ТЕРМОДИНАМІКА. ПЕРШИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ.....	300
16.1. Способи перенесення теплової енергії.....	300
16.2. Оборотні та необоротні процеси.....	301
16.2. Внутрішня енергія	303
16.3. Перший принцип термодинаміки	304
16.4. Внутрішня енергія ідеального газу.....	305
16.5. Робота в термодинаміці	306
16.6. Теплоємність газу.....	307
16.7. Залежність теплоємності газу від температури	309
16.8. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона	310
16.9. Політропний процес	313
16.10. Робота ідеального газу в різних процесах	314
16.11. Внутрішня енергія реального газу	316
16.12. Ефект Джоуля–Томсона (адіабатне розширення реального газу).....	317
16.13. Зрідження газів	321
Контрольні запитання	322
Приклади розв’язування задач	323
Задачі	324

Розділ 17

ДРУГИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ

Другий принцип термодинаміки не впливає з будь-якої теорії, це дуже важливий постулат, який дає змогу визначати кінцеві стани систем, можливі за конкретних початкових станів. Він вказує напрям можливих перетворень системи. Фактично він ніколи не був заперечений досвідом, хоча й не дуже очевидний.

17.1. Циклічні (колові) процеси. Теплова машина

Циклічним, або коловим, називають процес, у ході якого система, пройшовши проміжні стани, повертається в початковий. На діаграмі PV такий процес зображений замкненою кривою, площа петлі якої дорівнює роботі, виконаній системою за один цикл (рис. 17.1). Справді, переходячи зі стану 1 у стан 2 по лінії $1a2$, система виконує додатну роботу, яка чисельно дорівнює площі фігури між кривою $1a2$ і віссю абсцис. У другій частині циклу, коли об'єм зменшується і зовнішні сили виконують роботу над системою за меншого тиску, робота системи від'ємна (площа під кривою $2b1$), отже, загальна робота

$$A = \int_{1(a)}^2 PdV + \int_1^{2(b)} PdV .$$

Другий інтеграл від'ємний, бо $dV < 0$. Тому загальна робота дорівнює площі петлі.

Запишемо перший принцип термодинаміки для цього замкненого циклу:

$$\delta Q = dU + PdV .$$

Проінтегруємо цей вираз по замкненому циклу:

$$\oint \delta Q = \oint dU + \oint PdV .$$

Інтеграл

$$\oint dU = 0,$$

бо система повернулася у початковий стан.

Отже,

$$\oint \delta Q = \oint PdV = A.$$

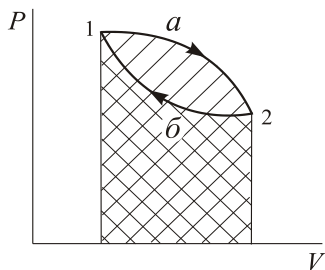


Рис. 17.1. Робота теплової машини за один цикл чисельно дорівнює площі петлі циклу

Це означає, що всю роботу за цикл система виконала завдяки кількості теплоти, яку отримала ззовні. Ця кількість теплоти надходила в систему на ділянці $1a2$ під час її розширення; частина її витрачена на ділянці $2б1$ для охолодження системи під час стискування. Охолодження системи (газу) обов'язкове, бо зменшення об'єму газу повинне відбуватися за меншого тиску,

щоб робота стискування була меншою від роботи розширення газу. Різниця цих теплот дорівнює виконаній системою роботі. На підставі такого принципу можна створити теплову машину, яка, діючи циклічно, буде перетворювати теплову енергію у механічну роботу. Отже, головними частинами будь-якої теплової машини є нагрівник, який надає робочому тілу певну кількість теплоти; робоча частина, яка виконує механічну роботу; холодильник, який охолоджує робоче тіло, тобто відбирає від робочого тіла деяку кількість теплоти.

17.2. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно

Розглянемо принцип дії теплової машини, робота якої ґрунтується на циклі Карно – замкненому ідеальному циклі, що складається з двох ізотерм і двох адіабат, тобто оборотних процесів, де робочим елементом є ідеальний газ, що міститься в спеціальному циліндрі, закритому рухомим поршнем. Оборотність процесів обов'язкова, бо ми хочемо отримати найбільшу можливу ро-

боту, а необоротність перешкоджає її виконанню. Стінки циліндра на окремих ділянках циклу можна зробити теплоізолюваними або теплопровідними.

Процес починається з ізотермічного розширення газу за температури T_1 . Для цього стінки циліндра роблять теплопровідними і з'єднують з нагрівником, який має температуру T_1 . Нагрівання відбувається дуже повільно, так що температура газу весь час дорівнює температурі нагрівника. На ділянці 1–2 (рис. 17.2) газ бере від нагрівника певну кількість теплоти Q_1 . У точці 2 нагрівник від'єднують від циліндра, його теплоізолюють, дають змогу газу адіабатно розширюватися так, щоб його температура знизилась до температури холодильника T_2 (завдяки виконаній газом роботі). Тут у точці 3 відкидають теплоізоляцію циліндра і приєднують до нього холодильник з температурою T_2 . Тепер газ повільно ізотермічно стискають за температури T_2 , а для того, щоб його температура була увесь час сталою, від газу відбирають певну кількість теплоти і переводять її у холодильник. У точці 4 знову теплоізолюють циліндр, від'єднують від холодильника і повільно адіабатно стискають газ доти, доки його температура не підвищиться до температури нагрівника T_1 . Отже, на ділянці 3–4–1 робота газу від'ємна, зовнішні сили виконують роботу стискання газу. Всі процеси повинні відбуватись дуже повільно, тому вони оборотні, і система повинна потрапити в початковий стан 1.

Робота газу за один цикл визначена площею петлі циклу Карно і, як уже зазначено, задана формулою

$$\oint \delta Q = \oint P dV = A.$$

Для нашому випадку цю роботу запишемо так:

$$\int_1^2 \delta Q_1 + \int_3^4 \delta Q_2 = Q_1 - Q_2 = A,$$

де Q_1 – кількість теплоти, одержаної газом від нагрівника; Q_2 – кількість теплоти, відданої газом холодильникові.

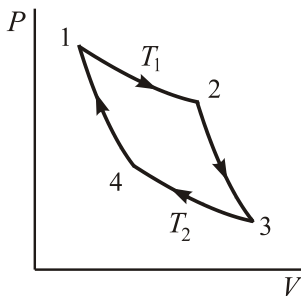


Рис. 17.2. Цикл Карно складається з двох ізотерм і двох адіабат

Отже, робота, виконана тепловою машиною за один цикл, дорівнює різниці кількостей теплоти, одержаної газом від нагрівника під час розширення газу і відданої холодильнику в процесі стискування газу.

Знайдемо коефіцієнт корисної дії теплової машини Карно. Він, як відомо, дорівнює відношенню корисної роботи до всієї затраченої енергії. У нашому випадку це буде відношення роботи, виконаної тепловою машиною за один цикл, до кількості теплоти, взятої машиною від нагрівника:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Кількість теплоти, яка надійшла до системи на ділянці циклу 1-2, дорівнює роботі газу під час його ізотермічного розширення на цій ділянці:

$$Q_1 = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

На ділянці циклу 3-4 маємо ізотермічне стискування газу, зовнішні сили виконують роботу, яка дорівнює кількості теплоти, відданої робочим тілом холодильнику:

$$Q_2 = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Оскільки система наприкінці повернулась у початковий стан, то зміна її внутрішньої енергії за один цикл дорівнює нулю, тобто система виконала роботу не завдяки зміні внутрішньої енергії. Роботу під час адіабатного розширення компенсує робота адіабатного стискування:

$$A_{23} = C_V(T_1 - T_2), \\ A_{41} = C_V(T_2 - T_1) = -C_V(T_1 - T_2).$$

Тому для коефіцієнта корисної дії (ККД) маємо

$$\eta = \frac{\frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Доведемо, що

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Справді, щоб цикл був замкнений, необхідно щоб на діаграмі циклу точки 2 і 3 були на одній адіабаті, тому для точок 2 і 3 адіабати 2-3 і для точок 1 і 4 адіабати 1-4 повинні виконуватися такі рівності:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1};$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}.$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Для ККД одержимо формулу

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Отже, ККД теплової машини Карно менший від одиниці. Це означає, що навіть за ідеальних умов, коли всі етапи цього кругового процесу оборотні, а тому виконана робота максимальна, всю кількість теплоти, взятої від нагрівника, не можна без втрат перетворити у механічну роботу.

Можна довести, що ККД необоротного циклу Карно менший, ніж для оборотного:

$$\eta_{\text{необ}} < \eta_{\text{об}}.$$

Робота реальних теплових машин ґрунтується на необоротних процесах, у яких неминучі непродуктивні витрати теплової енергії, а також втрати, зумовлені тертям. Тому ККД реальних теплових машин значно менший від ККД ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно.

17.3. Принцип дії холодильної машини

Якщо машину, яка працює за циклом Карно, змусити за допомогою іншої машини або мотора виконувати обернений цикл у напрямі 1-4-3-2-1 (див. рис. 17.2), то в такому разі зовнішні сили

виконуватимуть роботу над системою, у результаті чого система перетворюватиме частину цієї роботи в теплоту. На ділянці 1-4 газ буде адіабатно розширюватись, унаслідок чого охолodиться до температури T_2 . На ділянці 4-3 він розширюватиметься ізотермічно за температури T_2 , забираючи від холодильника якусь кількість теплоти. Від стану 3 газ буде адіабатно стискатися, його температура підвищиться до T_1 , а на ділянці 2-1 газ ізотермічно, за температури T_1 , під дією зовнішніх сил зменшуватиме свій об'єм. Для цього зовнішні сили повинні виконати роботу більшу від тої, яку виконував газ на ділянці 1-4-3, бо стискання відбуватиметься за вищої температури, а отже, за вищих тисків. Під час ізотермічного стискання на ділянці 2-1 температура газу повинна бути сталою і дорівнювати T_1 , тому він віддаватиме нагрівнику певну кількість теплоти, яка дорівнює сумі кількості теплоти, взятої у холодильника, і кількості теплоти, еквівалентної роботі, виконаній зовнішніми силами під час стискання газу. Отже, на ділянці 4-3 в систему надходить теплота, а на ділянці 2-1 відходить більше теплоти, ніж її увійшло в систему на ділянці 4-3. Зовнішні сили, виконавши роботу над газом, у зворотному циклі Карно змусять газ забирати певну кількість теплоти від холодного тіла і віддавати її гарячішому. ККД холодильної машини

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

тобто він тим вищий, чим менша різниця температур нагрівника і холодильника.

За таким принципом працюють холодильники. У реальних холодильних машинах застосовують не газ, а пару спеціальної речовини – фреон. Під час стискання пара переходить у рідкий стан, передаючи нагрівнику теплоту, яка виділяється внаслідок конденсації. Розширюючись у холодильнику, фреон випаровується, поглинаючи відповідну кількість теплоти.

Є також спеціальні теплові машини (теплові насоси), які, виконуючи роботу, забирають теплоту від водяних мас озера або річки з низькою температурою, і передають її у приміщення, підтримуючи у них відповідно високу температуру завдяки роботі машини і теплоті водяних мас в озері або в річці. На жаль, “теплові насоси” громіздкі і дорогі, тому не мають широкого практичного застосування.

17.4. Поняття про роботу двигунів внутрішнього згорання

Коротко опишемо принцип дії двигунів внутрішнього згорання, які значно поширені в автомобільній промисловості й авіації. Робота такого двигуна ґрунтується на використанні енергії періодичних вибухів суміші пари горючої речовини з повітрям безпосередньо у робочому циліндрі мотора (звідси й походить назва). Після попереднього стискування суміші поршнем у циліндрі мотора її підпалюють за допомогою електричної іскри. Чим сильніше стиснута суміш, тим більшу потужність розвиває мотор.

Розглянемо діаграму такого двигуна (рис. 17.3). Лінія 1-2 відображає процес засмоктування поршнем повітря, насиченого парою бензину, 2-3 – процес адіабатного стискування суміші, унаслідок чого тиск і температура суміші підвищуються.

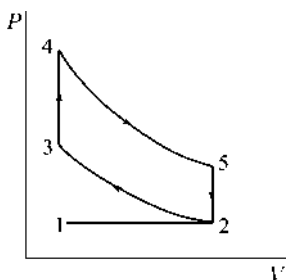


Рис. 17.3. Діаграма двигуна внутрішнього згорання

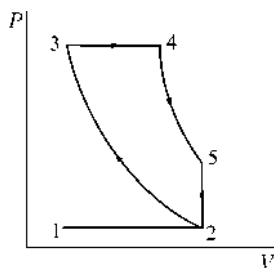


Рис. 17.4. Діаграма двигуна Дизеля

У початковий момент зворотного ходу поршня (у положенні 3) між електродами свічки проскакує іскра від індуктора, і суміш запалюється. Моментально тиск і температура підвищуються (лінія 3-4), починається робочий хід поршня (адіабата 4-5). Точці 5 відповідає кінець робочого ходу поршня. Далі відкривається вихідний клапан, тиск знижується до атмосферного (лінія 5-2), поршень виштовхує продукти згорання (лінія 2-1). Щоб робота такого мотора була рівномірною, застосовують багаточиліндрові мотори. Для збільшення ККД двигуна внутрішнього згорання необхідно підвищити температуру згорання суміші, а для цього треба сильніше її стискати. Проте за сильнішого стискування

відбувається передчасне самозагорання суміші (вибух), що негативно впливає на роботу мотора.

Цього недоліку нема в двигунах **Дизеля**, у яких під час холостого ходу поршня стискається лише повітря. Вкінці стимування спеціальний інжектор впорскує в циліндр пальне (нафту), яка там згорає. Діаграма роботи мотора Дизеля зображена на рис. 17.4; як бачимо, вона мало чим відрізняється від діаграми двигуна внутрішнього згорання. Під час робочого ходу поршня тиск деякий час є сталим (3-4), що, власне, вигідно відрізняє цикл двигуна Дизеля від циклу двигуна внутрішнього згорання. Крім того, оскільки дизелі працюють за вищих тисків і температур, їхній ККД найвищий серед теплових машин.

Найбільший ККД мають водяні турбіни, однак будівництво гребель і станцій дуже дороге, і часто будівництво парових установок з турбінами виявляється економічно вигіднішим.

17.5. Зведена кількість теплоти. Нерівність Клаузіуса

У параграфі 17.2 зазначено, що коефіцієнт корисної дії необоротної теплової машини завжди менший від коефіцієнта корисної дії оборотної машини Карно, тобто

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (17.1)$$

Ліворуч є загальне визначення ККД для довільної машини, праворуч – вираз, який ми знайшли для ККД оборотної машини. Знак рівності стосується оборотної, а нерівності – необоротної машини. Перетворивши вираз (17.1), перепишемо його так:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0, \quad (17.2)$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку отримує робоче тіло від нагрівника за температури T_1 ; Q_2 – кількість теплоти, яку віддає робоче тіло холодильнику. У наступному виразі під Q_1 і Q_2 будемо розуміти алгебричні величини, і вираз (17.2) виглядатиме так:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (17.3)$$

Цю формулу називають **нерівністю Клаузіуса**. Відношення кількості теплоти Q , яку отримала система від якогось тіла, до температури того тіла T Клаузіус назвав зведеною кількістю теплоти. Якщо система в ході циклу вступає в теплообмін з багатьма тілами, під час якого вона від тіла з температурою T_i отримує кількість теплоти ΔQ_i , то умову (17.3) треба переписати так:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0.$$

Сума зведених теплот для будь-якого колового процесу не може бути більша від нуля. Вона менша від нуля для необоротних процесів і дорівнює нулю для оборотних. Перейшовши до нескінченно великої кількості елементарних процесів, матимемо нерівність Клаузіуса в такому вигляді:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0,$$

де інтеграл треба брати по всьому замкненому циклу.

17.6. Поняття про ентропію

Нерівність Клаузіуса свідчить про те, що для оборотних циклів сума зведених кількостей теплот завжди дорівнює нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

З математичного аналізу відомо таке: якщо криволінійний інтеграл, узятий по замкненому контуру, дорівнює нулю, то існує така функція від змінних інтегрування, повний диференціал якої дорівнює підінтегральному виразу. У нашому випадку цю функцію називають ентропією і позначають S . Для неї запишемо

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Ентропія є *функцією стану речовини*, її значення не залежить від шляху інтегрування, тобто від того, яким процесом або способом система була переведена у цей стан, а залежить лише від початкових і кінцевих параметрів стану. Ентропія – величина адитивна, тобто ентропія системи тіл дорівнює сумі ентропій усіх тіл, що є в системі.

Зміну ентропії для оборотних процесів шукають за такою формулою:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (17.4)$$

де інтеграл беруть по шляху, яким реалізують процес між початковим 1 і кінцевим 2 станами; S_1 , S_2 – значення ентропій у цих станах.

Обчислимо зміну ентропії 1 моля ідеального газу під час довільного його оборотного переходу зі стану P_1 , V_1 у стан P_2 , V_2 .

За першим принципом термодинаміки

$$\delta Q = C_v dT + PdV,$$

звідки

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV.$$

Користуючись рівнянням стану ідеального газу Клапейрона–Менделєєва, вилучимо з останнього рівняння тиск P

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

У коловому процесі $T_2=T_1$, $V_2=V_1$, і зміна ентропії ідеального газу дорівнює нулю.

З формули видно, що ентропія газу зростає з підвищенням його температури і зі збільшенням його об'єму. Взагалі, будь-яке надання тілу певної кількості теплоти збільшує його ентропію, бо dS має той самий знак, що й δQ . Отже, за характером зміни ентропії можна робити висновок про напрям процесу теплообміну в системі.

Для необоротного процесу величина $\delta Q/T$ не є повним диференціалом якої-небудь функції стану. Тому $\int \frac{\delta Q}{T}$ у такому разі не дорівнює зміні ентропії. Це просто нескінченна сума зведених теплот. Щоб знайти зміну ентропії під час необоротного процесу, який відповідає переходу системи зі стану 1 у стан 2, треба обчи-

слити суму зведених теплот під час зміни стану системи для довільного *оборотного* процесу, який переводить цю систему зі стану 1 у стан 2.

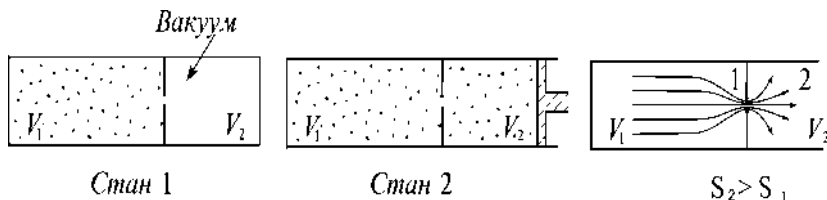


Рис. 17.5. Під час розширення газу в порожнину його ентропія збільшується

Як приклад обчислення зміни ентропії у необоротному процесі, розглянемо необоротний процес ізотермічного розширення 1 моля ідеального газу через малий отвір у порожнину. Припустимо, що у стані 1 газ займає об'єм V_1 , а після розширення у стані 2 – об'єм $V_1 + V_2$, де V_2 – об'єм порожнини (рис. 17.5). Повернемо систему з кінцевого стану 2 у початковий стан 1, виконавши оборотний процес 2–1 шляхом ізотермічного стискання газу за допомогою поршня. Оскільки процес 2–1 оборотний, то для нього можемо знайти зміну ентропії. За першим принципом термодинаміки

$$S_1 - S_2 = \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_2^1 dU + \int_2^1 \frac{PdV}{T}.$$

Однак $dT=0$, тому $dU=C_V dT=0$. Далі $PV=RT$ і $\frac{P}{T} = \frac{R}{V}$, отже,

$$S_1 - S_2 = \int_2^1 R \frac{dV}{V} = R \ln \frac{V_1}{V_1 + V_2},$$

або

$$S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1},$$

оскільки ентропія є функцією стану системи. Отже, під час розширення газу у порожнину його ентропія збільшується.

Доведемо тепер, що зміна ентропії в замкненій системі визначає напрям нерівноважних процесів, які відбуваються в ній.

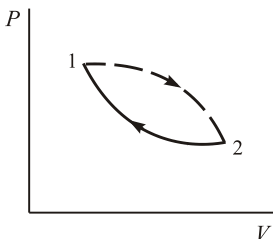


Рис. 17.6. Умовно необоротний процес позначають штриховою лінією

Нехай система перейшла зі стану 1 у стан 2 шляхом необоротного нерівноважного процесу (штрихова лінія на рис. 17.6, бо нерівноважний процес не можна зобразити лінією на діаграмі PV). Повернемо тепер систему у початковий стан 1, але вже за допомогою рівноважного (оборотного) процесу. У цілому маємо необоротний коловий процес (коловий процес є необоротний, якщо хоча б одна його частина необоротна).

Запишемо для цього колового процесу нерівність Клаузіуса (17.3):

$$\sum_{1\text{необ}}^2 \frac{\delta Q}{T} + \sum_{2\text{об}}^1 \frac{\delta Q}{T} < 0 \quad (17.5)$$

За формулою (17.4) сума зведених теплот для довільного оборотного процесу дорівнює різниці ентропій на початку і в кінці цього процесу, отже,

$$\sum_{2\text{об}}^1 \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2.$$

Тому нерівність (17.5) перепишемо так:

$$\sum_{1\text{необ}}^2 \frac{\delta Q}{T} + S_1 - S_2 < 0,$$

або

$$S_2 - S_1 > \sum_{1\text{необ}}^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (17.6)$$

Ми отримали вираз, за яким сума зведених теплот в необоротному процесі під час переходу системи зі стану 1 у стан 2 завжди менша від зміни ентропії.

У загальному випадку нерівність (17.6) для оборотного і необоротного процесів записують так:

$$S_2 - S_1 \geq \sum_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (17.7)$$

або, якщо стани 1 і 2 нескінченно близькі:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}.$$

Розглянемо замкнену систему, яка не має теплообміну з навколишнім середовищем. Для такої системи $\delta Q = 0$ за будь-яких процесів, що відбуваються в ній, тому з (17.7) випливає, що

$$S_2 - S_1 \geq 0.$$

Знак нерівності стосується необоротних процесів. Ми доходимо такого висновку: якщо замкнена система перебуває у нерівноважному стані, то в ній відбуваються процеси, які супроводжуються збільшенням ентропії системи. Ентропія замкненої системи не може зменшуватися. Вона зростає і досягає максимального значення тоді, коли система входить у стан рівноваги.

Ентропія також є мірою безладу, неупорядкованості структурних елементів системи. Справді, у прикладі проходження газу через отвір у порожнину (див. рис. 17.3) видно, що швидкості молекул у струмені 1 частково більше впорядковані, ніж поза отвором, де їхні швидкості розподілені хаотично, і ентропія стану 2 більша від ентропії стану 1.

Якщо система не замкнена, тобто обмінюється теплотою з навколишнім середовищем і виконує замкнений цикл, повертаючись вкінці у початковий стан, то її ентропія, як функція стану системи, матиме початкове значення. У ході циклу вона на окремих ділянках може зростати, на інших – спадати, але так, щоб за цикл її зміна дорівнювала нулю.

Принципи термодинаміки поширюються і на біологічні системи. Живий організм живиться, дихає; основа його життєдіяльності – обмін з навколишнім середовищем. Кожен процес в нашому організмі, який супроводжується виділенням енергії, збільшує ентропію. Щоб не досягнути стану термодинамічної рівноваги, тобто смерті, мусимо весь час компенсувати зростання ентропії в організмі, поглинаючи з навколишнього середовища речовини з нижчою ентропією, тобто речовини з більшою упорядкованістю. Живий організм для підтримки життєді-

яльності повинен перетворювати більш упорядковані системи в менш упорядковані. Процеси обміну речовин у клітині збільшують упорядкованість у ній. У таких випадках, наприклад, у процесі фотосинтезу, з малих молекул утворюються великі. І хоча тут ентропія клітини зменшується, в середовищі, що оточує клітину, відбуваються процеси, які супроводжуються зростанням ентропії, що переважає її зменшення у клітині.

Поняття ентропії має широке застосування і в інформатиці.

17.7. Статистичне тлумачення ентропії

Зростання ентропії системи під час самочинного необоротного процесу відповідає зростанню внутрішнього безладу (див. розширення газу в порожнину, рис.17.5). Отже, ентропія є мірою внутрішнього безладу в термодинамічній системі. Спробуємо виразити ступінь внутрішнього безладу в системі кількісно.

Будь-який макростан системи, визначений параметрами P , V , T , з мікроскопічного погляду характеризується певним розташуванням частинок у просторі і їхніми швидкостями, тобто мікростанами. Якщо, наприклад, система перебуває в стані термодинамічної рівноваги, то її макростан незмінний, і макропараметри мають сталі значення. Проте частинки, які утворюють систему, постійно переміщуються у просторі і внаслідок зіткнень між собою змінюють свій імпульс, а отже, мікростан системи постійно змінюється. З огляду на це будь-якому макростану відповідає величезна кількість мікростанів.

Щоб визначити, які процеси можуть відбуватися в ізольованій системі, треба знати ймовірність різних макростанів цієї системи.

У статистичній фізиці припускають, що всі мікростани мають однакову ймовірність. Чим більша кількість мікростанів відповідає якомусь макростану, тим більшу ймовірність має такий макростан. Найбільшу ймовірність, очевидно, має стан термодинамічної рівноваги. Звідси випливає, що ймовірність макростану системи може бути визначена кількістю різних мікростанів, за допомогою яких реалізовано цей макростан. *Кількість N мікростанів, за допомогою яких реалізовано макростан системи, називають статистичною вагою макростану.* Статистичну вагу макростану виражають дуже великими числами. Отже, статистична

вага, яка дорівнює кількості різних способів реалізації макростану, кожному з яких відповідає деякий мікростан системи, є мірою внутрішнього безладу системи. Стан, який відповідає ідеальному порядку у системі, забезпечений лише однією конфігурацією і значеннями імпульсів мікрочастинок системи; статистична вага такої макросистеми N має для нього мінімальне значення, яке дорівнює одиниці, наприклад, коли всі атоми закріплені в конкретних місцях.

Як бачимо, ймовірність макростану пропорційна до його статистичної ваги. Отже, статистичну вагу можна було б використовувати для характеристики ймовірності макростану системи. Проте ця величина не вигідна у практичному застосуванні тим, що, по-перше, визначена дуже великим числом N , по-друге, її визначення супроводжується значними труднощами, і по-третє, статистична вага не має властивості адитивності. Тому за *характеристику ймовірності макростану системи приймають ентропію S* , яка, як виявилось, пропорційна до логарифма від N (формула Больцмана):

$$S = k \ln N, \quad (17.8)$$

де k – стала Больцмана. Умова термодинамічної рівноваги, тобто максимальність ентропії, набуває того смислу, що термодинамічній рівновазі відповідає найімовірніший стан.

Зміну ентропії простіше обчислювати, оскільки для оборотних процесів її можна виразити через звичайні параметри системи P, V, T :

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

тобто за відомою нам формулою для обчислення ентропії оборотних процесів без обчислення ймовірностей.

17.8. Формулювання другого принципу термодинаміки

У природі простежується певна спрямованість термодинамічних процесів. Наприклад, під час занурення гарячого куска заліза в холодну воду певна кількість теплоти завжди самочинно переходить від гарячого тіла до холодної води, а не навпаки, хоча

закон збереження енергії не забороняє такого переходу. Можна згадати ще явище дифузії та інші подібні явища. З наведених прикладів видно, що такі процеси в одному напрямі відбуваються самочинно, а для їхнього перебігу у зворотному напрямі треба, щоб відбувався якийсь інший, компенсаційний процес. Крім того, з аналізу роботи теплової машини, яка працює за прямим циклом Карно, випливає, що принципово неможливо за допомогою теплової машини, яка діє циклічно, перетворити в роботу всю кількість теплоти, взятої робочим тілом від нагрівника. Частина її обов'язково повинна бути передана холодильнику.

Узагальнивши великий практичний матеріал, учені дійшли висновку, який сформулювали як **другий принцип термодинаміки**. Є декілька формулювань цього принципу:

1. *Неможливим є коловий процес, єдиним наслідком якого було б перетворення кількості теплоти, одержаної від нагрівника, в еквівалентну їй роботу (неможливість побудови вічного двигуна другого роду) (Томсон–Кельвін).*

Цей принцип стверджує, що перетворення певної кількості теплоти в роботу повинне супроводжуватися передаванням деякої кількості теплоти від нагрівника до холодильника, тобто частина цієї теплоти обов'язково переходить до тіл з нижчою температурою або, інакше кажучи, розсіюється.

2. *Неможливим є коловий процес, єдиним результатом якого було б передавання енергії у формі теплоти від холодного тіла до гарячого (Клаузіус).*

Справді, важко уявити собі таку ситуацію, щоб деяка кількість теплоти самочинно перейшла від холодного тіла, яке ще більше охолонувало, до гарячого, яке ще більше нагріється, а в навколишньому середовищі не відбудуться ніяких змін.

Можна довести, що обидва формулювання еквівалентні.

3. *У замкненій (ізольованій) системі ентропія зростає або є сталою.*

Другий принцип термодинаміки – це принципово нова фізична концепція, яка зовсім не пов'язана з першим принципом. Ніщо в попередніх наших викладах не свідчило про те, що теплота завжди повинна переходити від гарячого тіла до холодного. Це нові відомості про явища, що відбуваються в природі.

Другий принцип термодинаміки, як і необоротність термодинамічних процесів, є **статистичним** і виявляється лише на ма-

крорівні. На мікрорівні нема необоротних процесів, для мікрочастинок всі стани однаково ймовірні; закони, які керують рухом окремих частинок, оборотні. За Больцманом, необоротність виникає тому, що кількість мікропроцесів, які відбуваються в одному напрямі, переважаюче більша порівняно з кількістю процесів, які відбуваються у зворотному й ймовірність яких значно менша, однак не дорівнює нулю. Це означає, що і дія закону зростання ентропії під час проходження процесів у замкнених системах виявляється лише на макрорівні. Отже, другий принцип термодинаміки, на відміну від першого, який виконується абсолютно точно, визначає лише найімовірніший перебіг процесів і стосується систем, що складаються з величезної кількості об'єктів (молекул), які утворюють замкнену систему. Якщо кількість об'єктів системи або її частини мала, то тоді можливі флуктуації, які порушують теплову рівновагу. За досить тривалий проміжок часу в системі буде не лише усталюватися рівноважний стан, а й відбуватимуться відхилення від нього. Це випадкові відхилення від середніх значень параметрів стану системи в мікроскопічних об'єктах, що відповідають рівноважному стану за конкретних температури і тиску. У макростанах для цього потрібен час астрономічного порядку. За таких умов можуть простежуватися явища, що суперечать другому принципу термодинаміки.

17.9. Теорема Нернста

Зі зниженням температури тіла інтенсивність хаотичного руху молекул зменшується, тобто знижується ступінь безладу в системі, а отже, зменшується і статистична вага цього стану. За абсолютного нуля температури статистична вага тіла дорівнює одиниці, бо молекули тіла розташовані єдиним способом – атоми містяться у вузлах ґратки, а їхні електрони – на найнижчих енергетичних рівнях. У такому разі з формули (17.8) випливає, що *ентропія будь-якого тіла прямує до нуля, коли його абсолютна температура $T \rightarrow 0$* :

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Це твердження називають **теоремиою Нернста**, або третім принципом термодинаміки. З теореми Нернста випливає таке:

якщо $T \rightarrow 0$, то теплоємність тіл прямує до нуля, а це означає, що досягнення температури абсолютного нуля не можливе.

17.10. Термодинамічні потенціали Гельмгольца і Гіббса

Як уже зазначено, термодинаміку можна застосовувати для з'ясування суті не лише фізичних, а й хімічних явищ. Вона дає змогу вивчати рівновагу різних гетерогенних систем, тобто систем хімічно неоднорідних, які складаються з декількох фаз, що є об'єктом досліджень у фізичній і колоїдній хімії. У таких випадках вигідно ввести адекватні функції стану, так звані термодинамічні потенціали.

Об'єднаємо другий принцип термодинаміки у формі

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}; \quad TdS \geq \delta Q$$

з першим

$$\delta Q = dU + PdV$$

і отримаємо співвідношення

$$TdS \geq dU + PdV, \quad (17.8)$$

яке стосується як оборотного (знак рівності), так і необоротного (знак нерівності) процесів.

У загальному випадку напрям процесу в системі характеризує ентропія. З'ясуємо, які функції вказують напрям процесу за конкретних умов, накладених на систему. Припустимо, що система обмінюється з навколишнім середовищем теплотою, проте так, що її температура й об'єм є сталими ($T = \text{const}$, $V = \text{const}$). Тоді

$$PdV = 0, \quad TdS = d(TS),$$

і формулу (17.8) можна переписати так:

$$d(U - TS) \leq 0.$$

Позначимо

$$U - TS = F, \quad (17.9)$$

тоді

$$dF \leq 0.$$

Функцію $F = U - TS$ називають **вільною енергією**, або термодинамічним **потенціалом Гельмгольца**. Отже, у системі ізотермічний процес за сталого об'єму відбувається в напрямі зменшення вільної енергії.

Умовою рівноваги системи, яка має сталий об'єм за сталої температури, є мінімум її вільної енергії. Зрозуміло, що тут ідеться про системи, стан яких, крім параметрів P, V, T , визначений ще іншими змінними, наприклад, концентрацією розчиненої речовини в розчинах чи кількістю речовин, які реагують у хімічних реакціях.

Якщо система розширюється (з теплообміном), але $T = \text{const}$, то вона виконує роботу, яка визначена такою умовою (на підставі виразів (17.8) і (17.9)):

$$PdV \leq -d(U - TS) = -dF, \quad (17.10)$$

або

$$\delta A \leq -dF.$$

Максимальна корисна робота, яку може виконати система під час оборотного ізотермічного розширення,

$$\delta A_{\text{max}} = -dF.$$

Інтегруючи цю рівність у межах оборотного ізотермічного переходу від стану 1 до стану 2, отримаємо

$$A_{\text{ізот}} = -(F_2 - F_1).$$

Цей вираз засвідчує, що *максимальна корисна робота, яку може виконати система в оборотному ізотермічному процесі, дорівнює зменшенню її вільної енергії*.

Для внутрішньої енергії маємо вираз

$$U = F + TS. \quad (17.11)$$

Формула (17.11) означає, що внутрішня енергія тіла не може повністю перетворитися в механічну. Тому вираз TS називають зв'язаною енергією. **Зв'язана енергія** – це та частина енергії, яку не можна перетворити у механічну роботу в ізотермічному процесі; вона тим більша, чим більша ентропія.

Усі реальні процеси необоротні, а це супроводжується збільшенням ентропії тіл, які беруть у них участь. Формула (17.11) означає, що поряд зі зростанням ентропії відбувається процес знецінення енергії, бо зміна ентропії системи пов'язана з тою енергією системи, яка в реальних умовах переходу системи з одного стану в інший за сталої температури (навколишнього середовища) перетворюється у внутрішню і розсіюється, зменшуючи значення максимальної роботи, яку могла б виконати система, до дійсного. Отже, формула (17.11) свідчить, що *зміна ентропії системи характеризує ступінь розсіяння, знецінення енергії під час взаємоперетворень її видів*. Усі види енергії вкінці перетворюються в теплоту, а теплота лише частково перетворюється в інші форми енергії, частина її обов'язково переходить до холодильника, тобто розсіюється. Отже, кількість теплової енергії весь час збільшується завдяки іншим її формам.

Припустимо тепер, що система перебуває в стані з $T = \text{const}$ і $P = \text{const}$. Тоді

$$TdS = d(TS),$$

і умову (17.10) перепишемо так:

$$d(U - TS + PV) \leq 0, \quad dG \leq 0. \quad (17.12)$$

Функцію $G = U - TS + PV$ називають термодинамічним **потенціалом Гіббса**. Вона також є функцією стану системи. Нерівність (17.12) означає, що *за умов $T = \text{const}$ і $P = \text{const}$ процеси в системі відбуваються у напрямі зменшення термодинамічного потенціалу Гіббса*. Рівновага відповідає його мінімуму.

Хімічні реакції – це процеси, що часто відбуваються за умов $T = \text{const}$ і $P = \text{const}$, тому нерівність (17.12) широко застосовують у фізичній хімії. Наприклад, під час звичайного фазового перетворення за $T = \text{const}$ і $P = \text{const}$ рівновага настає тоді, коли обидві фази мають однакові термодинамічні потенціали Гіббса $G_1 = G_2$, тобто коли $dG = 0$.

На закінчення наведемо відомі функції стану термодинамічних систем. Це внутрішня енергія U , ентальпія H , ентропія S , вільна енергія (термодинамічний потенціал Гельмгольца) F і термодинамічний потенціал Гіббса G . У стані термодинамічної рівноваги ці потенціали набувають екстремальних значень.

Контрольні запитання

1. Який принцип дії теплової машини?
2. З яких термодинамічних процесів складається цикл Карно?
3. Чому дорівнює коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно?
4. Що називають нерівністю Клаузіуса?
5. За якою формулою шукають зміну ентропії оборотних процесів?
6. Поясніть статистичний зміст ентропії.
7. Чи не суперечить другому принципу термодинаміки те, що в ізотермічному процесі вся кількість теплоти, надана системі, витрачається на виконання системою роботи?
8. Яких значень набувають термодинамічні потенціали, коли система вступає у рівноважний стан?

Приклади розв'язування задач

17.1. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, бере за кожен цикл від нагрівника 3000 Дж теплоти. Температура нагрівника 500 К, холодильника – 300 К. Яку роботу виконує машина за один цикл і яку кількість теплоти віддає холодильнику за один цикл?

Розв'язування. Робота ідеальної теплової машини Карно за один цикл

$$A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1.$$

Відомо, що

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{500 - 300}{500} = 0,40.$$

Тоді

$$A = \eta Q_1 = 0,40 \cdot 30000 = 1200 \text{ Дж.}$$

Для Q_2 маємо

$$Q_2 = Q_1 - A = 3000 - 1200 = 1800 \text{ Дж.}$$

17.2. Нагріту воду масою $m=200$ г, температура якої $t_1=80^\circ\text{C}$, перемішують у термостаті з такою ж масою холодної води, температура якої $t_2=20^\circ\text{C}$. Після змішування в термостаті усталюється температура t_3 . Чому дорівнює загальна зміна ентропії? Питома теплоємність води $C=4190$ Дж/кг·К.

Розв'язування. Процес вирівнювання температур двох мас води під час їхнього змішування є необоротним, бо це самочинне передавання певної кількості теплоти від гарячого тіла до холодного. У такому разі обчислення ентропії ґрунтується на тому, що ентропія є функцією стану системи, тобто вона визначена початковим і кінцевим станами системи незалежно від того, за допомогою якого процесу відбувся перехід.

Подумки опишемо процес змішування двох мас води з різними температурами як оборотний процес таким способом. Обидві частини води вважатимемо ізольованими: одну з температурою T_1 , іншу – з температурою T_2 ; кожен з них оборотним процесом переведемо в стан 2 з однаковою температурою T_3 . Температуру T_3 визначимо з рівняння теплового балансу

$$cm(T_1 - T_3) = cm(T_3 - T_2),$$

звідки

$$T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{353 + 293}{2} = 323\text{K}.$$

Після цього обидві частини води змішаємо, однак це не зумовлює жодних змін у їхньому стані. Таким способом в обох випадках початковий і кінцевий стани однакові, і зміну ентропії можна обчислити за формулою для оборотного процесу. Отже, зміна ентропії гарячої води

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = mc \int_{T_1}^{T_3} \frac{dT}{T}.$$

Аналогічно зміна ентропії холодної води

$$\Delta S_2 = mc \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T}.$$

Загальна зміна ентропії системи

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \left[\ln \frac{T_3}{T_1} + \ln \frac{T_3}{T_2} \right] = mc \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta S &= 4190 \cdot 0,2 \cdot \ln \frac{323^2}{353 \cdot 293} = 7,3 \text{ Дж/К}. \end{aligned}$$

Задачі

17.1. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, за один цикл виконує роботу 80 кДж. Температура нагрівника 127°C, холодильника 27°C. Знайдіть кількість теплоти, яку отримує машина від нагрівника за один цикл.

Відповідь: 320 кДж.

17.2. Парова машина потужністю 29,4 кВт споживає за одну годину роботи 16,2 кг вугілля з питомою теплоємністю згорання 33 МДж/кг. Температура котла 200°C , холодильника 60°C . Знайдіть фактичний ККД машини η_1 і порівняйте його з ККД η_2 ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно, між цими ж температурами.

Відповідь: $\eta_1=20\%$, $\eta_2=30\%$.

17.3. У циліндрах карбюраторного двигуна внутрішнього згорання газ стискають політропно так, що після стискання його температура стає 427°C , а об'єм зменшується у 5,8 разу. Початкова температура газу 140°C . Знайдіть показник політропи.

Відповідь: 1,3.

17.4. Знайдіть зміну ентропії під час плавлення 1 кг льоду, температура якого 0°C .

Відповідь: 1230 Дж/К.

17.5. Знайдіть зміну ентропії під час переходу 8 г кисню від об'єму 10 л за температури 80°C до об'єму 40 л за температури 300°C .

Відповідь: 5,4 Дж/К

Розділ 18

ТВЕРДЕ ТІЛО

Фізика твердого тіла – один з дуже важливих розділів фізики, що має практичне застосування. Висновки з цієї теорії є в основі матеріалознавства, виробництва напівпровідників, штучних алмазів та рубінів тощо. Дослідження властивостей твердих тіл відкриває широкі можливості для створення нових матеріалів з наперед заданими властивостями – жаростійких, надтвердих, хімічно стійких, склокристалів тощо.

Молекулярно-кінетична теорія твердих тіл не дала таких результатів, як для газів. Досягнення значного збільшення електронного мікроскопа, іонного проектора, сканувального мікроскопа дали змогу підтвердити правильність моделі розташування атомів у твердому тілі, дослідити структуру твердих тіл. Було створено досконалу теорію теплоємності твердого тіла, дифузії тощо. Дослідження квантових явищ відіграють особливу роль, тому що саме квантова природа матерії визначає властивості речовини.

Сучасні дослідження у фізиці твердого тіла поділяють на два напрями: 1) дослідження властивостей досконалих кристалів; 2) дослідження неідеальних твердих тіл з різного типу недосконаlostями і їхній вплив на фізичні властивості твердих тіл.

18.1. Кристали

Характерною ознакою твердих тіл є те, що вони зберігають свою форму й об'єм. Здебільшого, це кристалічні речовини, що мають правильне огранення, зумовлене відповідним розміщенням атомів (молекул, іонів) у вузлах кристалічної ґратки. Правильне розташування структурних елементів у ґратці кристалічних тіл називають далеким порядком. Це означає впорядкованість у

просторовому розташуванні частинок твердих кристалічних тіл на будь-яких відстанях у цих тілах.

Монокристалам, тобто твердим тілам з суцільною кристалічною ґраткою по всьому об'єму, властива анізотропія – залежність деяких фізичних властивостей тіла від напрямку в кристалі, а також стала температура плавлення. Більшість твердих тіл є полікристалічними, тобто такими, що складаються з величезної кількості дрібних, хаотично орієнтованих монокристаліків розміром близько $10^{-6} - 10^{-7}$ м, тому такі тверді тіла в цілому ізотропні.

Кристалічну ґратку монокристала характеризує елементарна кристалічна комірка, це паралелепіпед, за допомогою якого шляхом переміщення його у трьох взаємно перпендикулярних напрямках можна відтворити всю кристалічну ґратку (рис.18.1). Розмірами, формою і розташуванням у ній атомів повністю визначена структура кристала.

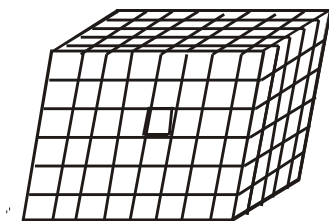


Рис. 18.1. Кристал побудований з елементарних комірок

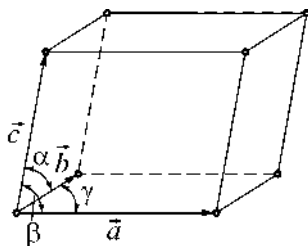


Рис. 18.2. Елементарна кристалічна комірка

Періодом ідентичності кристалічної ґратки називають довжини ребер a , b , c елементарної кристалічної комірки (рис. 18.2), які разом з кутами між ними α , β , γ визначають тип елементарної комірки. Вони є параметрами комірки. Елементарних комірок у кристалі може бути багато, проте часто доцільно послуговуватись найменшим структурним елементом кристала, який за хімічним складом відповідає цій речовині.

Кристалічна ґратка може мати різні види симетрії. Симетрія – це властивість ґратки збігатися з собою внаслідок переміщення в просторі. Є багато різновидів симетрії, зокрема: трансляційна – просте переміщення в просторі на період ідентичності; симетрія

стосовно поворотів навколо деяких осей; симетрія дзеркального відображення відносно певних площин та ін. Можливі 230 комбінацій елементів симетрії (просторові групи), що утворюють 32 класи симетрії, які дають сім кристалічних систем (сингоній).

18.2. Типи кристалічних ґраток

Кристалічні ґратки за видами взаємодії між їхніми структурними елементами можна розділити на чотири головні групи.

1. Іонні кристали. Їхня ґратка утворена позитивними і негативними іонами, розташованими у вузлах ґратки, які пов'язані між собою кулонівською взаємодією протилежно заряджених іонів. Кожен іон взаємодіє з усіма сусідами. Такий зв'язок виникає внаслідок обміну зарядами між атомами, його називають гетерополярним, він характерний для неорганічних сполук. Прикладом кристалів такого типу є NaCl.

2. Атомні кристали. У вузлах ґратки таких кристалів розташовані атоми, які пов'язані з сусідами валентними, так званими спареними електронами. Такий зв'язок називають ковалентним (гомеополярним), його створюють електронні пари – по одному електрону від кожного атома, тобто відбувається частковий обмін зарядами. В основі гомеополярного зв'язку є квантово-механічне явище обмінної взаємодії (обмінний ефект). Це спрямований валентний зв'язок, коли існують переважні напрями, по яких налагоджуються електронні зв'язки. Кристалами такого типу є алмаз, графіт, германій.

3. Металічні кристали – у вузлах ґратки є додатні іони металу, а між ними вільно рухаються валентні електрони, які належать усім іонам і зміцнюють кристалічну ґратку, ніби цементують кристал. Вільним рухом валентних електронів пояснюють добру електропровідність металів.

4. Молекулярні кристали мають ґратку, утворену з молекул, між якими діють ван-дер-ваальсівські сили притягання, не зумовлені обміном зарядами. Ці кристали дуже слабкі, зв'язки між молекулами легко руйнуються внаслідок теплових коливань, тому молекулярні кристали плавляться за дуже низьких температур. Це такі кристали, як лід, вуглекислота, більшість органічних сполук.

18.3. Вплив дефектів кристалічної ґратки на механічні властивості кристалів

У реальних кристалах завжди є **дефекти** ґратки. Зокрема, дефектами можуть бути **вакансії** – незаповнені місця у вузлах ґратки, атомні включення, коли деякі місця в ґратці зайняті сторонніми атомами або коли атом, покинувши своє місце у вузлі ґратки, розташований між вузлами. Такі дефекти називають точковими. Інший тип дефектів – це так звані **дислокації**, які виявляються в тому, що одна з атомних площин раптово обривається (крайова дислокація) або утворює гвинтову поверхню. Це гвинтова дислокація.

Дефекти дуже впливають на фізичні властивості кристалів. Для практичних питань важливо те, що механічна міцність твердих тіл чутлива до структури. Тому міцність значно залежить від способу виготовлення кристала, тобто від типу і кількості дефектів. Наприклад, монокристали чистого заліза дуже пластичні, легко деформівні. З іншого боку, сталь не зазнає пластичної деформації до напружень, у 100 разів більших. Зсув у атомних масштабах під час навантажень відбувається саме в місцях розташування дислокацій. За напружень, вище критичних, дислокації розмножуються і переміщуються у відповідних площинах. З підвищенням температури їхній рух посилюється, що призводить до збільшення пластичності кристалів майже у всіх твердих тілах. Домішки, які вводять у сталь (вуглець, азот), а також такі метали, як марганець, вольфрам, хром, молібден, ванадій, дуже взаємодіють з дислокаціями, затримуюючи їхній рух. Дислокації можуть взаємодіяти і між собою. За великої їх кількості під час збільшення напружень вони хаотично переплітаються між собою і подальший їхній рух утруднений, що збільшує міцність матеріалу. Це явище практично застосовують у так званому наклепуванні матеріалу, коли його дуже деформують, наприклад, сталеву заготовку для підвищення міцності вальцюють між валками в листи. За низьких температур у таких листах зберігається багато дислокацій, у результаті чого отримуємо високу міцність листів. З огляду на це дислокації мають виняткове значення для практичних потреб.

Отже, є два шляхи створення міцного матеріалу. По-перше, це створення бездефектного кристала (без дислокацій). По-друге,

максимальне спотворення правильної структури кристала, що затруднить розмноження дислокацій і поширення тріщин. Уведення домішок сторонніх атомів, які порушують правильність вихідної структури (легуювання), сильне деформування (наклепування), об'єднання цих прийомів під час термомеханічної обробки – це ті напрями, які застосовують у техніці для отримання міцних матеріалів. Усі вони ґрунтуються на одній ідеї – створенні густої мережі дефектів ґратки.

18.4. Енергетичний спектр класичного і квантового осциляторів

Осцилятором називають систему, яка може виконувати гармонічні коливання біля положення рівноваги. Коливання такої системи описує рівняння гармонічного осцилятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Відомо, що потенціальна енергія гармонічного осцилятора (класичного) може змінюватися неперервно, вона визначена формулою (див. параграф 8.7)

$$П = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

Якщо графічно відобразити залежність потенціальної енергії гармонічного осцилятора від амплітуди коливання, то отримаємо суцільну лінію – параболу. Отже, спектр можливих значень енергії **класичного** гармонічного осцилятора **неперервний** (рис. 18.3, а).

У квантовій механіці енергію не поділяють на кінетичну і потенціальну, бо цьому заперечує принцип невизначеності Гайзенберга, за яким добуток невизначеності координати на невизначеність імпульсу не може бути менший від сталої Планка, поділеної на 2π :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}.$$

Знати потенціальну енергію означає знати координати тіла, а знати кінетичну енергію — це знати його імпульс.

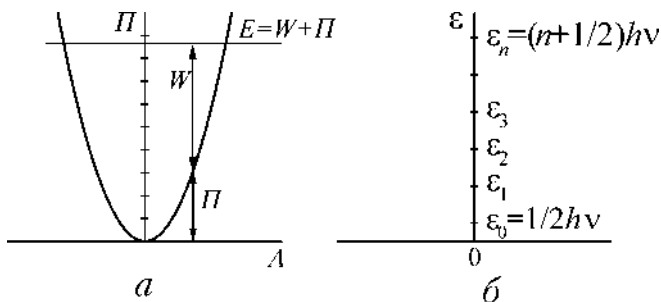


Рис. 18.3. Графік потенціальної енергії класичного осцилятора (а) і схема енергетичних рівнів квантового осцилятора (б)

Енергія **квантового** осцилятора, як свідчать теоретичні розрахунки, змінюється **дискретно**:

$$\epsilon = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Як бачимо, його енергетичні рівні розташовані еквідистанційно.

Особливістю квантового осцилятора є також те, що його енергія навіть за температури абсолютного нуля не дорівнює нулю, як це маємо у класичного осцилятора. Ця **нульова енергія**

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} h\nu.$$

Наявність нульової енергії квантового осцилятора підтверджена експериментально в дослідях з розсіянням кристалами світла і рентгенівського випромінювання, яке не зменшується до нуля навіть за температури $T = 0$.

18.5. Теплові коливання атомів у кристалі. Фоони

Теплові коливання атомів у кристалах – це складні ангармонічні коливання зв'язаної системи частинок. Для більшості кристалів амплітуда теплових коливань невелика, вона не перевищує 5-10% міжатомної відстані. Тому в першому наближенні такі коливання можна вважати гармонічними і на цій підставі пояснити теплоємність, пружні та оптичні властивості твердого тіла.

Проте в основі пояснення теплового розширення твердого тіла та деяких квантово-механічних явищ є ангармонічність коливань структурних елементів ґратки.

Оскільки ґратка – це зв’язана коливна система, то коливання кожного структурного елемента призводять до утворення в кристалі хвилі, яка з великою швидкістю поширюється від частинки до частинки. Ці коливання у кристалах з кубічною симетрією є двох типів: акустичні й оптичні. Якщо молекули кристала коливаються як одне ціле, тобто сусідні частинки рухаються в одному напрямі, в кристалі виникають флуктуації густини речовини. Хвилі, спричинені такими коливаннями, називають акустичними (пружними). У молекулярних кристалах сусідні іони різних знаків можуть рухатися у протилежних напрямках, що спричинює утворення флуктуації електричного поля, тобто електромагнітної хвилі. Це оптичні хвилі. Отже, будь-яка хвиля, яка поширюється в молекулярному кристалі, матиме коливання як акустичного, так і оптичного типу. Будемо розглядати лише акустичні (пружні) хвилі, частоти яких можуть бути в межах від звукових до 10^{13} Гц. Енергію таких теплових коливань можна відобразити як енергію пружних стоячих хвиль різних дискретних частот широкого діапазону.

За аналогією з електромагнітною хвилею, де кожній електромагнітній хвилі відповідає потік фотонів, кожній пружній біжучій хвилі в кристалі можна поставити у відповідність сукупність рухомих квазічастинок – **фононів**, які ніби атоми ідеального газу заповнюють увесь об’єм тіла. Вони рухаються в кристалі, взаємодіють між собою, розсіюються. Самі фонони, кожен зокрема, можуть мати різну енергію, сумарна енергія фононів дорівнює енергії всієї ґратки.

Взаємодія фононів з іншими частинками відбувається так, ніби вони мають імпульс

$$p = \frac{h}{2\pi} k,$$

де

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n.$$

Фонони не можуть існувати у вакуумі, лише в кристалах, тому їх називають квазічастинками, а величину p – квазіімпульсом. Отже, **фонон** – це елементарне збудження кристалічної ґратки, квантом енергії якого є теплове коливання.

Рух фононів характеризують вільним пробігом, вони розсіюються під час взаємодії з іншими фононами, з вузлами ґратки, електронами, фотонами. Зазначимо, що у всіх видах взаємодії фононів виконуються закони збереження енергії та імпульсу.

Сукупність динамічних властивостей фононів і характер нульового руху (основного стану) утворюють енергетичний спектр твердого тіла, який визначає його властивості.

18.6. Механізм теплопровідності кристалів

Якщо в твердому тілі є градієнт температури, то кількість теплоти q , яка переходить через одиничну площину, перпендикулярну до напрямку поширення теплоти за одиницю часу (густина потоку),

$$q = -\chi \frac{dT}{dz}, \quad (18.1)$$

де χ – коефіцієнт теплопровідності. Формула (18.1) подібна до формули (14.3), яка стосується теплопровідності газу, однак її фізичний зміст зовсім інший.

Пояснення теплопровідності у кристалах ґрунтується на ідеях квантової механіки, згідно з якими *теплоту у твердому тілі переносять хвилі теплових коливань ґратки, тобто фонони*, які поширюються у кристалі зі швидкістю пружних хвиль (звуку), тому здавалося б, що теплопровідність кристалів повинна бути дуже велика. Проте хвилі теплових коливань (фонони), взаємодіючи між собою і вузлами ґратки, як уже зазначено, розсіюються, швидкість їхнього поширення залежить від кількості та спектра енергії фононів. Час існування та енергія фононів залежать від температури тіла, за низьких температур кількість фононів мала, з підвищенням температури вона збільшується за досить складним законом. Змінюється й енергетичний спектр фононів. Припускають, що фонони переносять теплову енергію так само, як атоми ідеального газу у тепловому русі за невеликого тиску. Отже, за аналогією з класич-

ним газом для коефіцієнта теплопровідності кристала можемо записати

$$\chi = \frac{1}{3} v l \rho c_v,$$

де l – середній вільний пробіг фононів; v – швидкість поширення пружних коливань (звуку); c_v – питома теплоємність кристала; ρ – його густина.

Складніше питання про вільний пробіг фононів. Оцінки засвідчують, що в діелектриках за досить високих температур це значення обернено пропорційне до температури кристала діелектрика, тому для коефіцієнта теплопровідності можемо записати:

$$\chi = \frac{C}{T}.$$

Таку залежність пояснюють збільшенням розсіювання фононів на фононах, концентрація яких збільшується з підвищенням температури діелектрика.

У металах механізм теплопровідності подвійний: ґраткою (фононами) та електронами провідності. Досвід свідчить, що в чистих металах за не дуже низьких температур чим ліпша електропровідність металу, тим більша його теплопровідність (закон Відемана–Франца). Це означає, що в металах носіями теплової енергії є також електрони провідності. За високих температур електронна складова теплопровідності більша від фононної, за середніх – навпаки, головну роль у процесі перенесення теплоти відіграє фононна складова і, нарешті, за низьких температур – знову на чільне місце стає електронна.

За дуже низьких температур простежується **квантовий ефект**, який виявляється у тому, що коефіцієнт теплопровідності залежить від розмірів зразка. Для тонкого шару зразка, наприклад, для тонкої плівки міді за низьких температур він може бути менший від коефіцієнта теплопровідності сапфіру. Це пояснюють тим, що у тонкоплівкових зразках середня довжина вільного пробігу фононів залежить від розмірів зразка, тут маємо велике розсіювання фононів поверхнею плівки, а це призводить до зменшення її теплопровідності.

18.7. Теплоємність твердих тіл

18.7.1. Формула Дюлонга і Пті

Відомо, що молярна теплоємність газу за сталого об'єму

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}. \quad (18.2)$$

Отже, щоб знайти молярну теплоємність тіла, треба знати його внутрішню енергію U . В ідеальному кристалі простої хімічної речовини атоми ґратки можуть коливатися у трьох взаємно перпендикулярних напрямках, вони мають по шість ступенів вільності, а на один напрям коливань припадає два види механічної енергії: кінетична і потенціальна. Для одного моля такої речовини внутрішня енергія

$$U = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{6}{2} RT = 3RT.$$

Застосуємо формулу (18.2) до простої хімічної речовини й для молярної теплоємності отримаємо

$$C = 3R.$$

Молярна теплоємність кристалів простих хімічних речовин є сталою і дорівнює $3R$ (закон Дюлонга і Пті).

У твердих тілах різниця між C_V і C_P невелика, тому молярну теплоємність твердих тіл позначають просто C .

Формула Дюлонга і Пті є наближеною. З експерименту відомо, що теплоємність твердих тіл залежить від температури (рис. 18.4). За низьких температур під час нагрівання тіла вона зростає як T^3 і лише за високих температур наближається до $3R$. Для різних речовин температура, за якої теплоємність сягає максимального значення, різна.

Класична фізика не може пояснити залежність теплоємності від температури. Формула Дюлонга і Пті виведена на підс-

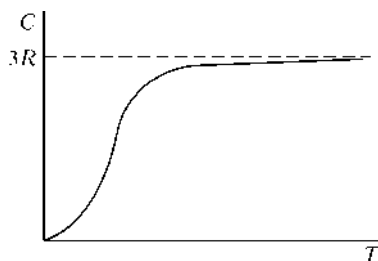


Рис. 18.4. Графік залежності теплоємності кристалів простих хімічних речовин від температури

таві класичного закону розподілу енергії теплового руху атомів за ступенями вільності, який не можна застосовувати в області низьких температур. Тут суттєвими стають квантові ефекти.

18.7.2. Поняття про теорію теплоємності твердих тіл Айнштейна і Дебая

Першим залежність теплоємності кристалів від температури на засадах квантової механіки пояснив Айнштейн. За його уявленнями тверде тіло є системою незалежних квантових осциляторів, частота коливань яких $\nu \sim 10^{13}$ Гц є однаковою. Очевидно, що енергія такого осцилятора квантована. За такої частоти (10^{13} Гц) енергія квантового осцилятора відповідає класичній енергії теплового руху за температури приблизно 300 К.

Спробуємо на підставі моделі Айнштейна визначити якісний характер залежності молярної теплоємності твердого тіла від температури. Будемо ґрунтуватися на тому, що $C_V = \partial U / \partial T$, а внутрішня енергія визначена середньою енергією теплового руху молекул. Обчислення середньої енергії теплового руху молекул кристала як квантових осциляторів з урахуванням розподілу Больцмана і квантування енергії дають таке її значення:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (18.3)$$

а не kT , як це маємо в класичній фізиці. Вираз (18.3) називають **формулою Планка**. З неї випливає таке:

1) за високих температур, коли

$$kT \gg h\nu,$$

тобто

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1,$$

експоненту можна розкласти в ряд ($e^x \approx 1 + x$, якщо $x \ll 1$):

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \rightarrow 1 + \frac{h\nu}{kT}.$$

Тоді з формули (18.3) отримаємо

$$\langle \varepsilon \rangle \rightarrow kT$$

і молярна теплоємність $C \rightarrow 3R$.

Отже, за високих температур значення молярної теплоємності, обчисленої на підставі моделі Айнштейна, відповідає закону Дюлонга і Пті.

2) за низьких температур

$$kT \ll h\nu,$$

теплову енергію ґратка не сприймає, бо енергетичні сходинки квантових осциляторів ($h\nu$) значно більші від теплових поштовхів (kT) атомів; високочастотні коливання ґратки не будуть збуджуватись, теплоємність мала. Теорія визначає, що під час зниження температури до абсолютного нуля молярна теплоємність C зменшується до нуля за експонентою.

Отже, теорія Айнштейна лише якісно пояснює зменшення молярної теплоємності зі зниженням температури, бо насправді $C \rightarrow 0$, якщо $T \rightarrow 0$ за законом кубів (T^3).

Дебай розвинув теорію Айнштейна, врахувавши, що коливання атомів у вузлах ґратки не є незалежними, а пов'язані між собою силами взаємодії, яка приводить до поширення хвиль у твердому тілі з утворенням стоячих хвиль, діапазон коливань яких дуже широкий: він залежить від структури кристала. Заміна теплових коливань атомів пружними коливаннями ґратки дала змогу ввести лише один параметр θ , який характеризує такі теплові властивості твердого тіла, коли у ньому збуджується весь спектр нормальних коливань, включаючи і максимальну частоту. За Дебаєм виходить, що, починаючи від цієї характеристичної температури $T = \theta$ (θ – **температура Дебая**), яка пов'язана з найбільшою власною частотою коливань ґратки формулою

$$\theta = \frac{h\nu_{\max}}{k},$$

молярна теплоємність кристалів зменшується під час зниження температури спочатку повільно, а потім як T^3 . Це означає, що дискретність (квантовість) дебаївських теплових хвиль виявляється лише за температур нижче температури Дебая. Температуру Дебая θ можна вважати за границю між високими і низькими

температурами. Для більшості речовин дебаївська температура є у межах 300–800 °С, для алмазу – близько 2000 °С. За високих температур теорія Дебая приводить до результатів, які збігаються з класичними.

У твердих тілах, ґратки яких складені з різних атомів або молекулярних груп, можуть бути внутрішні ступені вільності (обертальні, коливальні), тому молярна теплоємність для них може перевищувати $3R$. Наприклад, для таких тіл, як хлористий амоній, молярна теплоємність $C = 101 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·К, нітрат целюлози – $C = 247 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·К, сахароза – $C = 422 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·К.

Контрольні запитання

1. Чим характеризують кристалічні тіла?
2. Які типи кристалічних ґраток Ви знаєте?
3. Що таке фонон?
4. Який механізм теплопровідності кристала-діелектрика?
5. Що відображає закон Дюлонга і Пті?
6. Який графік залежності молярної теплоємності кристалів простих хімічних речовин від температури? Поясніть його.
7. Що таке температура Дебая?

Приклади розв'язування задач

18.1. Свинцева куля зі швидкістю 450 м/с вдаряється до стіни і застряє в ній. Уважаючи, що 10% кінетичної енергії кулі пішло на її нагрівання, знайдіть, на скільки градусів нагрілась куля. Питому теплоємність свинцю знайдіть за законом Дюлонга і Пті.

Розв'язування. Кількість механічної енергії, витраченої на нагрівання кулі,

$$Q = \frac{mv^2}{2} \cdot 0,1.$$

З іншого боку, кількість теплоти, потрібної для нагрівання кулі на Δt градусів $Q = mc\Delta t$, де c – питома теплоємність свинцю. Однак $c = C/\mu$, де C – молярна теплоємність, визначена за законом Дюлонга і Пті: $C = 3R$. Віносна молярна маса свинцю $\mu = 207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Отже,

$$\frac{mv^2}{20} = mc\Delta t,$$

звідки

$$\Delta t = \frac{v^2}{20} \cdot \frac{\mu \cdot 10^{-3}}{3R} \Rightarrow \Delta t = \frac{450^2 \cdot 207 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 3 \cdot 8,31} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta t = 84^\circ\text{C}.$$

Задачі

18.1. Користуючись законом Дюлонга і Пті, знайдіть питому теплоємність заліза.

Відповідь: 446 Дж/кг·К.

18.2. Яка кількість теплоти проходить за 1 с через мідний стрижень площею поперечного перерізу 10 см² і довжиною 50 см, якщо різниця температур на кінцях стрижня 15°C. Тепловими втратами нехуйте.

Відповідь: 11,7 Дж.

18.3. Яку силу треба прикласти до кінців сталевго стрижня з площею поперечного перерізу 10 см², щоб не дати йому розтягнутися під час нагрівання від $t=0$ до $t=30^\circ\text{C}$?

Відповідь: 71 кН.

Розділ 17 ДРУГИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ	325
17.1. Циклічні (колові) процеси. Теплова машина	325
17.2. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно.....	326
17.3. Принцип дії холодильної машини	329
17.4. Поняття про роботу двигунів внутрішнього згорання	331
17.5. Зведена кількість теплоти. Нерівність Клаузіуса	332
17.6. Поняття про ентропію	333
17.7. Статистичне тлумачення ентропії.....	338
17.8. Формулювання другого принципу термодинаміки.	
Спрямованість термодинамічних процесів у природі.....	339
17.9. Теорема Нернста.....	341
17.10. Термодинамічні потенціали Гельмгольца і Гіббса.....	342
Контрольні запитання.....	345
Приклади розв'язування задач	345
Задачі.....	346
 Розділ 18 ТВЕРДЕ ТІЛО	 348
18.1. Кристали	348
18.2. Типи кристалічних ґраток.....	350
18.3. Вплив дефектів кристалічної ґратки на механічні властивості кристалів	351
18.4. Енергетичний спектр класичного і квантового осциляторів.....	352
18.5. Теплові коливання атомів у кристалі. Фоони	353
18.6. Механізм теплопровідності кристалів.....	355
18.7. Теплоємність твердих тіл.....	357
18.7.1. Формула Дюлонга і Пті.....	357
18.7.2. Поняття про теорію теплоємності твердих тіл Айнштайна і Дебая. 358	
Контрольні запитання.....	360
Приклади розв'язування задач	360
Задачі.....	361

Розділ 19

РІДИНИ

Рідини займають проміжне становище між твердим тілом і газом. Незбереження форми зближує рідину з газом, проте вони мають поверхню, яка обмежує їх. Густина, показник заломлення, теплоємність рідини такі ж, як і в твердих тілах. За сталого тиску вони можуть існувати в обмеженому інтервалі температур – від точки плавлення до точки кипіння, у кожної речовини (крім гелію) є лише одна рідинна фаза.

19.1. Структура рідин

Кожен вид агрегатного стану речовини має властивий йому порядок розташування частинок. Молекули газу рухаються хаотично і безперервно з різними швидкостями у різних напрямках – це приклад безструктурного утворення. У твердих тілах частинки розташовані у вузлах правильної кристалічної ґратки, тут маємо так званий далекий порядок. У рідинах є деякий геометричний порядок у розташуванні найближчих сусідів, його називають близьким порядком. Конкретний атом має приблизно таку ж кількість найближчих сусідів, як і в кристалічній речовині. До того ж, найближчі сусіди і в рідині, і в кристалах містяться приблизно на однаковій відстані. Отже, розташування атомів у рідинах хоча розупорядковане, проте вони мають деяку структуру, проміжну між газом і твердим тілом. Ця структура залежить від хімічної індивідуальності рідини та характеру міжмолекулярних сил. Наприклад, зріджені інертні гази, між молекулами яких діють ван-дер-ваальсівські сили, є простими рідинами. У складніших випадках між молекулами існує спрямований зв'язок (насичені сили).

Характер руху частинок у рідині своєрідний – молекули нерегулярно коливаються біля положень рівноваги з перескаку-

ванням між цими положеннями. Дослідження, виконані на основі розсіяння рентгенівських променів у рідинах, а також методом нейтронних пучків засвідчили, що рідину ліпше вважати як розупорядковане тверде тіло, у якого частина комірок незаповнена молекулами.

Кількісною характеристикою упорядкованості структурних елементів рідини є так звана **радіальна функція розподілу**. Її визначають шляхом дослідження залежності інтенсивності розсіяного рідиною рентгенівського проміння від кута розсіяння.

Виберемо в рідині деяку молекулу за початок координат і визначимо середню густину інших молекул у різних місцях речовини навколо цієї молекули як функцію радіуса-вектора $\mathbf{r}$. Для цього проведемо навколо вибраної молекули сфери радіусами r і $r + dr$. Об'єм тонкого сферичного шару між цими сферами дорівнюватиме $4\pi r^2 dr$. Кількість центрів молекул, які потрапляють у цей тонкий шар, запишемо так:

$$dN = U(r)4\pi r^2 dr ,$$

де $U(r)$ – **густина** радіального розподілу.

Як приклад, на рис. 19.1 показана крива густини радіального розподілу $U(r)$ для кристалічного тіла. Регулярні піки кривої розподілу відображають існування певного порядку в розташуванні атомів у твердому тілі, тобто ґратки кристала. Це приклад далекого порядку.

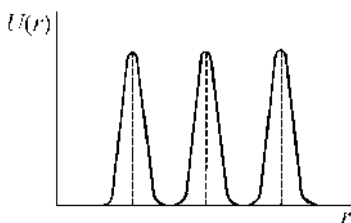


Рис. 19.1. Радіальна функція розподілу для кристала

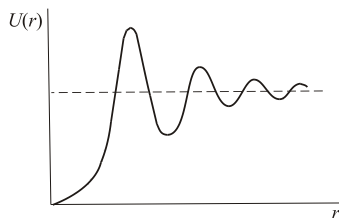


Рис. 19.2. Радіальна функція розподілу для рідини

Крива на рис. 19.2 стосується рідини. Максимуми на кривій густини радіального розподілу свідчать, що деякі міжатомні відстані виділяються серед інших. Густина $U(r)$ коливається навколо середнього значення і на досить великих відстанях збігається з

ним. Це означає, що молекули розташовані в рідині не так хаотично, як у газі, тобто тут є **близький порядок**, який з віддаленням від центральної молекули щораз більше розмивається і переходить у безлад. Експерименти свідчать, що повне розмивання функції густини радіального розподілу настає на відстанях $r > 4d$, де d – діаметр молекул. Отже, різні відстані між молекулами в рідині не рівноймовірні, а це доводить, що рідина має внутрішню структуру, яку ми характеризуємо як близький порядок.

19.2. Поняття про діркову теорію рідини

Під час плавлення кристала питомий об'єм речовини збільшується приблизно на 10%. Це означає, що в процесі плавлення суцільність речовини порушується, у різних місцях утворюються порожнини – дірки, які зумовлюють плинність речовини. Ці мікророзриви (порожнечі) самовільно зникають в одних місцях і з'являються в інших. Молекули розподіляються в рідині компактними блоками, у яких ще зберігається близький порядок. Тепловий рух у рідинах зводиться до коливань молекул біля деяких середніх положень рівноваги, які, проте, є тимчасовими. Потім положення молекули стрибкоподібно змінюється на відстань, яка дорівнює середній відстані між молекулами. Для переходу зі стану рівноваги на нове місце молекулі потрібно розірвати зв'язки з сусідніми молекулами, тобто подолати потенціальний бар'єр. Отже, молекула повинна мати запас потенціальної енергії Π , яку називають **енергією активації**. Ймовірність того, що молекула має таку потенціальну енергію, за Больцманом, пропорційна величині

$$e^{-\frac{\Pi}{kT}},$$

а час осілого існування $\bar{\tau}$ тим більший, чим менша ця ймовірність, тобто

$$\bar{\tau} = \tau_0 e^{\frac{\Pi}{kT}}, \quad (19.1)$$

де τ_0 – середній час коливання молекули біля положення рівноваги.

Величину $\bar{\tau}$ називають часом релаксації. З підвищенням температури час релаксації $\bar{\tau}$ зменшується, що зумовлює збільшення рухливості (плинності) рідини і зменшення її в'язкості.

З формули (19.1) випливає таке: якщо до рідини прикладена зовнішня сила і час її дії $t > \bar{\tau}$, то молекула зміщується переважно в напрямі дії зовнішньої сили – маємо плинність рідини. Якщо ж $t \ll \bar{\tau}$, то рідина виявляє пружну деформацію розтягу і навіть зсуву.

Внутрішня будова рідини значно впливає на її властивості. Наприклад, наявність у молекул електричних дипольних моментів призводить до неоднакової ймовірності орієнтації таких молекул за напрямками. Своєрідно поводить себе і рідина з довгих молекул (органічні речовини). Це особливо виявляється у рідких кристалах, які мають практичне застосування.

19.3. Дифузія в рідинах

Досвід свідчить, що явище дифузії в рідинах відбувається значно повільніше, ніж у газах. Теоретичні розрахунки дають таку формулу для коефіцієнта дифузії у рідинах:

$$D \sim e^{-\frac{\Pi}{kT}}.$$

Як бачимо, коефіцієнт дифузії збільшується з підвищенням температури. Проте для рідин він значно менший, ніж для газів.

У біології дифузія відіграє важливу роль. Це, наприклад, дифузія поживних елементів у живих організмах, зокрема дифузія різних елементів та іонів у клітині через мембрани. Тут треба розрізняти дифузію пасивну й активну. Пасивна відбувається у напрямі зменшення концентрації і її швидкість визначена звичайним законом (Фіка):

$$N = -DS \frac{dc}{dz},$$

де dc/dz – градієнт концентрації; S – поверхня поділу. Надходження калію і кальцію в коріння рослин також відбувається частково завдяки пасивній дифузії.

Активна дифузія визначена метаболізмом. Вона можлива в напрямі збільшення вільної енергії, яке, однак, відбувається завдяки зменшенню вільної енергії інших частин системи. В ак

тивній дифузії важливу роль відіграє “трансмембранна різниця потенціалів”, яка збільшує селективність проникання іонів відповідних електричних зарядів.

Теплопровідність в рідинах більша від теплопровідності в газах, проте на багато разів менша, ніж у твердих тілах.

19.4. Поверхневий натяг

Суміжний з поверхнею поділу шар молекул будь-якої речовини перебуває в інших умовах порівняно з молекулами всередині речовини. Це призводить до своєрідних ефектів на поверхні тіла.

Розглянемо тонкий поверхневий шар рідини товщиною r_{ef} , що дорівнює радіусу молекулярної дії. Виберемо у цьому шарі одну молекулу і поміркуємо, які сили діють на неї з боку інших молекул внутрішніх прилеглих шарів (рис. 19.3). Унаслідок притягання між молекулами рівнодійна таких сил, що діють на кожную молекулу поверхневого шару з боку внутрішніх шарів, буде напрямлена всередину рідини, бо концентрація молекул у парі, над рідиною, значно менша, ніж у рідині, і вони зрозташовані на далеких відстанях. Це означає, що молекули, переходячи з глибини рідини у приповерхневий шар, повинні подолати протидію цієї сили, а це супроводжується зменшенням їхньої кінетичної енергії і збільшенням потенціальної. Надлишок потенціальної енергії молекул поверхневого шару над енергією молекул усередині речовини називають **поверхневою енергією**. Якби рідина була у вільному невагомому стані, то вона мала б форму кулі, бо це відповідає мінімуму поверхневої, тобто мінімуму потенціальної енергії.

Нескомпенсована сила притягання між молекулами приповерхневого шару призводить до того, що вздовж поверхні рідини утворюється дотична до неї сила бічного натягу, яка стягує рідину до купи і яку називають силою поверхневого натягу. Ця сила дотична до поверхні рідини, її характеризують коефіцієнтом поверхневого натягу α . **Коефіцієнт поверхневого натягу** – це фізична величина, яка чисельно дорівнює силі поверхневого натягу, що припадає на одиницю довжини на поверхні рідини. Отже, для коефіцієнта поверхневого натягу α маємо формулу

$$\alpha = \frac{df}{dl},$$

де f – сила поверхневого натягу.

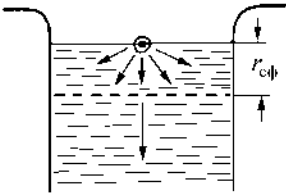


Рис. 19.3. Рівнодійна сил, що діють на молекулу на поверхні рідини, напрямлена всередину рідини

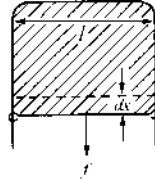


Рис. 19.4. Сила, що діє на рухому перемичку, зрівноважувана силою поверхневого натягу

Коефіцієнтові поверхневого натягу можна дати й інший фізичний зміст.

Знайдемо роботу, яку виконують сили поверхневого натягу під час стягування ними рідини до купи, тобто під час зменшення поверхні рідини. Виконаємо такий дослід: з тонкої дротини виготовимо Π -подібну рамку з рухомою перемичкою (рис. 19.4). На рамці утворимо мильну плівку. Перемичку з одного боку втримуватиме сила поверхневого натягу тонкої плівки, а з іншого – зовнішня сила f' . Зменшуючи силу f' , можна домогтися того, що сили поверхневого натягу, долаючи силу f' і скорочуючи поверхню плівки, будуть піднімати перемичку, виконуючи певну роботу. Роботу сил поверхневого натягу δA на шляху dx у цьому процесі запишемо так:

$$\delta A = -\alpha 2l dx = -\alpha \delta \sigma.$$

Тут

$$\delta \sigma = 2l dx,$$

де $\delta \sigma$ – зміна поверхні з обох боків плівки. Знак мінус означає зменшення поверхні плівки під дією сили поверхневого натягу.

Зменшення поверхні плівки силами поверхневого натягу супроводжується переведенням поверхневих молекул у глибину рідини. Це приводить до зменшення їхньої потенціальної енергії

та збільшення кінетичної, тобто до підвищення температури рідини і зміни її внутрішньої енергії й відповідної зміни коефіцієнта поверхневого натягу. Щоб зміна поверхневої енергії дорівнювала роботі сил поверхневого натягу, витрачених на скорочення поверхні рідини, процес скорочення поверхні плівки повинен відбуватися за сталої температури.

Розглянемо цей процес з термодинамічного погляду і застосуємо перший принцип термодинаміки, як до ізотермічного процесу:

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

$$\delta A = \delta Q - dU.$$

З іншого боку,

$$\delta Q = TdS,$$

де S – ентропія. Для роботи сил поверхневого натягу отримаємо формулу

$$\delta A = TdS - dU = -d(U - TS),$$

або

$$\delta A = -\alpha \delta \sigma = -d(U - TS) = -dF,$$

тобто

$$\delta A = -dF. \quad (19.2)$$

Тут F – вільна енергія. Як видно, робота сил поверхневого натягу виконується завдяки зменшенню вільної енергії. Це стосується будь-якого ізотермічного процесу, тобто вільна поверхнева енергія – це та частина поверхневої енергії тіла, яка визначена роботою ізотермічного утворення цієї поверхні. Саме вона, на відміну від “зв’язаної”, може бути поглинута або виділена під час різних процесів. Оскільки

$$\alpha \delta \sigma = dF,$$

то для коефіцієнта поверхневого натягу отримаємо ще таку формулу:

$$\alpha = \frac{dF}{d\sigma}.$$

Отже, можемо дати інше означення коефіцієнта поверхневого натягу: *коефіцієнт поверхневого натягу чисельно дорівнює величині вільної енергії одиниці поверхні.*

Як бачимо, сили поверхневого натягу є тим чинником, який забезпечує рівноважний стан системи, що відповідає мінімуму потенціальної енергії.

Коефіцієнт поверхневого натягу значно залежить від наявності сторонніх домішок у рідині та від її температури. Він зменшується з підвищенням температури, наближаючись до нуля за критичного значення.

19.5. Змочування

Якщо на поверхні твердого тіла помістити краплю рідини, то вона або розтечеться по поверхні, або згорнеться у сплюснуту краплю. *Явище, яке полягає у здатності краплі рідини розтікатися по поверхні твердого тіла або іншої рідини, називають змочуванням.* Воно зумовлене взаємодією молекул твердого тіла, рідини і газу (пари) між собою по лінії їхнього стику (периметру змочування). Якщо сили притягання між молекулами твердого тіла і рідини більші від сил притягання між молекулами краплі рідини, то крапля намагатиметься збільшити поверхню контакту з твердим тілом, розтікаючись тонким шаром і змочуючи поверхню твердого тіла.

По периметру змочування діють три сили поверхневого натягу, напрямлені перпендикулярно до лінії периметра змочування, по дотичних до поверхонь рідини і твердого тіла. На рис. 19.5 показано змочування (а) і незмочування (б) рідиною поверхні твердого тіла. Тут α_{12} , α_{13} , α_{23} – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях поділу, відповідно, твердого тіла 1 – рідини 2, твердого тіла 1 – газу (пари) 3, рідини 2 – газу (пари) 3.

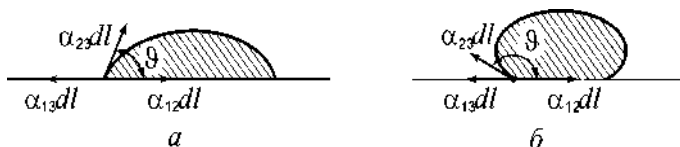


Рис. 19.5. Часткове змочування (а) і незмочування (б) рідиною поверхні твердого тіла

Позначимо dl – елемент лінії периметра змочування, ϑ – **кут змочування**, тобто кут, утворений плоскою поверхнею твердого тіла і дотичною до поверхні рідини на стику трьох фаз, вимірний усередині рідини. Тоді сила поверхневого натягу, яка припадає на елемент довжини лінії стику трьох фаз dl , $df = \alpha dl$, і для стану рівноваги отримаємо таку умову:

$$df_{23} \cos \vartheta = df_{13} - df_{12},$$

звідки

$$\cos \vartheta = \frac{df_{13} - df_{12}}{df_{23}} = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}}.$$

Якщо $\cos \vartheta > 0$, тобто $\alpha_{13} > \alpha_{12}$, то ϑ – гострий кут і рідина частково змочує поверхню твердого тіла, якщо ж $\alpha_{13} - \alpha_{12} > \alpha_{23}$, то умова рівноваги порушена, рідина розтікається по поверхні твердого тіла, покриваючи його тонкою плівкою, і маємо повне змочування. Якщо ж $\alpha_{12} > \alpha_{13} + \alpha_{23}$, то рідина стягується в краплю, і тоді є повне незмочування. Аналогічна картина змочування і незмочування простежується і для двох рідин, які не змішуються. Якщо краплю однієї такої рідини помістити на поверхні іншої, то в одному випадку крапля набуде форми сочевиці (незмочування, олія на воді), в іншому – розтечеться, утворюючи тонку плівку з кольоровими інтерференційними смугами (змочування, бензин, нафта на воді).

Змочування і незмочування залежать від природи тіл, що контактують: рідина може змочувати поверхню одного тіла (наприклад, вода-скло) і не змочувати поверхню іншого (вода-парафін).

Є **поверхнево-активні речовини**, за допомогою яких, вносячи їх у рідину на межу фаз двох речовин, можна змінювати поверхневий натяг рідини, впливаючи цим на її змочувальну здатність. Змочувальну здатність поверхні твердого тіла також можна збільшити (гідрофілізувати) або зменшити (гідрофобізувати). Для цього на поверхню твердого тіла треба нанести тонкий абсорбційний шар поверхнево-активної речовини. Поверхнево-активні речовини концентруються головню на поверхні поділу фаз з відповідною орієнтацією молекул, які мають гідрофільну “голову” і гідрофобний “хвіст”. Змочуючи поверхню твердого тіла і проникаючи у мікротріщини його поверхні, вони призводять до зни-

ження його міцності, а це має широке практичне застосування у технології обробки матеріалів, у бурінні гірських порід, а також у різних виробничих процесах (виробництво мийних засобів, текстильне виробництво), флотаційному методі збагачення руд та в інших галузях виробництва.

19.6. Тиск під викривленою поверхнею рідини. Формула Лапласа

У місцях стику вільної поверхні рідини зі стінкою посудини внаслідок змочування маємо відхилення поверхні рідини від горизонтальної. Це явище особливо помітне у вузьких трубках, порах, краплях. Викривлення поверхні рідини зумовлює появу додаткового тиску на неї, спричиненого силами поверхневого натягу, які намагаються зменшити поверхню рідини.

Знайдемо додатковий тиск ΔP , зумовлений кривиною поверхні рідини. Розглянемо кулясту краплю рідини і зробимо її умовний розріз, виділяючи кулястий сегмент біля точки A (рис. 19.6).

На елемент dl кола основи сегмента діє сила αdl . Проекція цієї сили на напрям, паралельний до AO , буде $\alpha dl \cos \varphi$. По всьому периметру основи сегмента $2\pi r$ діє сила поверхневого натягу f , яка стягує виділений сегмент з рештою рідини. Ця сила

$$f = \alpha 2\pi r \cos \varphi,$$

де r – радіус основи сегмента;

φ – кут між радіусом основи сегмента і радіусом краплі.

Додатковий тиск, який створює ця сила, буде дорівнювати відношенню сили f до площі основи сегмента:

$$\Delta P = \frac{f}{\pi r^2} = \frac{\alpha 2\pi r \cos \varphi}{\pi r^2} = \frac{2\alpha \cos \varphi}{r} = \frac{2\alpha}{R},$$

бо

$$r = R \cos \varphi.$$

Отже, крива куляста поверхня створює додатковий тиск на рідину:

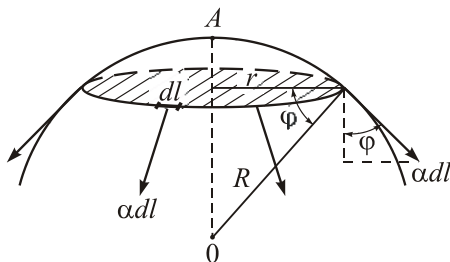


Рис. 19.6. Виведення формули Лапласа

$$\Delta P = \frac{2\alpha}{R}. \quad (19.3)$$

Для поверхні довільної форми, як довів Лаплас, додатковий тиск на рідину, зумовлений кривиною поверхні, визначений формулою

$$\Delta P = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (19.4)$$

де R_1 і R_2 – головні радіуси кривини в заданій точці поверхні. Вираз (19.4) називають **формулою Лапласа**.

Правильність формули (19.4) відображає такий дослід. На кінцях скляної Т-подібної трубки (рис. 19.7) видувують дві мильні бульбашки.

Можна зробити так, що одна з них буде більша від іншої.

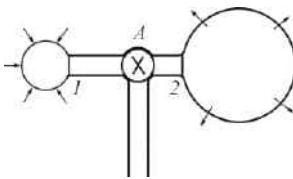


Рис. 19.7. Дві мильні бульбашки на кінцях скляної трубки не будуть у рівновазі, велика ще більше роздується, бо тиск у меншій бульбашці більший

Якщо краном A сполучити ліву і праву частини трубки, то більша бульбашка ще більше роздується, а мала зменшиться, рівноваги не буде, бо додатковий тиск, зумовлений кривиною поверхні, у меншій бульбашці більший. Рівновага настане тоді, коли бульбашка 1, зменшуючись перетвориться в кульовий сегмент, радіус якого буде дорівнювати радіусу бульбашки 2.

Кривина поверхні рідини впливає і на тиск насиченої пари над нею: що менша крапля, то більший тиск насиченої пари.

19.7. Капілярні явища

Додатковий тиск, який виникає під викривленою поверхнею рідини внаслідок змочування поверхні трубок-капілярів, мікропор і щілин, зумовлює піднімання або опускання рівня рідини в них. Викривлену вільну поверхню рідини називають **меніском**. Якщо рідина змочує стінки капіляра, то у зануреному в рідину одним кінцем капілярі утворюється меніск вгнутої

форми і додатковий тиск, який виникає, спричинює піднімання рідини в капілярі, якщо ж не змочує, то її меніск має випуклу форму і тоді маємо зниження рівня рідини в капілярі (рис. 19.8). Рівновага настає тоді, коли додатковий тиск ΔP , зумовлений кривиною поверхні рідини в капілярі, зрівноважується гідростатичним тиском ρgh :

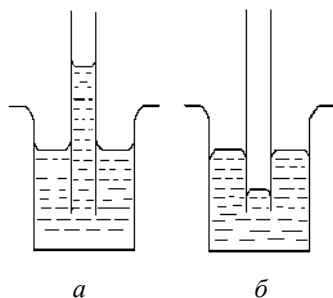


Рис. 19.8. Рідина змочує (а) і не змочує (б) капіляр

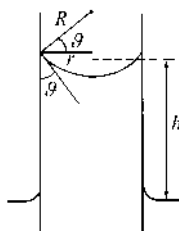


Рис. 19.9. Визначення висоти піднімання рідини в капілярі

$$\frac{2\alpha}{R} = \rho gh,$$

звідси

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g R}, \quad (19.5)$$

де R – радіус кривини меніска; h – різниця рівнів рідини у капілярі і в широкій посудині. Замінімо радіус кривини меніска R на радіус капіляра r . З рис. 19.9 видно, що радіуси кривини меніска і капіляра пов'язані між собою таким співвідношенням:

$$R = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Підставимо значення R у вираз (19.5) та отримаємо формулу для h :

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r} \cos \theta .$$

Капілярні явища мають важливе значення у природі і техніці. Вони сприяють надходженню поживних речовин у тканинах тварин, по стовбурі або стеблі рослин, підніманню води з глибших шарів ґрунту у приповерхневій, вбиранню фільтрувальним папером рідини, води бетоном тощо.

Контрольні запитання

1. Чим характеризують упорядкованість частинок у рідині?
2. Яка характеристика структури рідини?
3. Коли рідина виявляє пружні властивості?
4. Як залежить дифузія в рідині від температури?
5. Який фізичний зміст коефіцієнта поверхневого натягу?
6. У якому випадку рідина змочує поверхню твердого тіла?
7. Чим пояснити існування додаткового тиску під кривою поверхнею рідини?
8. Яка роль капілярних явищ у природі?

Приклади розв'язування задач

19.1. Дві краплі ртуті радіусом по 0,5 мм кожна зливаються в одну краплю. Визначте відношення сумарної поверхневої енергії двох крапель ртуті до поверхневої енергії новоутвореної краплі. На скільки нагріється новоутворена крапля ртуті внаслідок злиття двох крапель?

Розв'язування. Повна поверхнева енергія Π пропорційна площі поверхні краплі. Для двох малих крапель $\Pi = \kappa \alpha S_2$; для великої $\Pi_1 = \kappa \alpha S_1$, κ – коефіцієнт пропорційності; $S = 4\pi r^2$, $S_1 = 4\pi R^2$, де r – радіус малих крапель, R – радіус великої краплі. Радіус R знайдемо з рівності маси великої краплі сумі мас малих крапель:

$$2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \Rightarrow R = r \cdot \sqrt[3]{2} ,$$

де ρ – густина ртуті. Для відношення поверхневих енергій отримаємо вираз

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{2r^2}{R^2} = \frac{2r^2}{r^2 \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[3]{2} = 1,26 .$$

Шукаємо зміну температури ртуті ΔT .

Виділятися або поглинатися у різних процесах може лише частина повної поверхневої енергії, яку називають вільною енергією F . За її допо-

могою дають термодинамічне означення коефіцієнта поверхневого натягу α . Енергія, витрачена на нагрівання краплі ртуті, дорівнює зміні вільної енергії. Отже,

$$\Delta F = \alpha \Delta S = mc \Delta T,$$

де m – маса; c – питома теплоємність ртуті;

$$\Delta S = 2S - S_1 = 2 \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2 = 4\pi r^2 (2 - \sqrt[3]{4}).$$

$$\alpha \Delta S = \alpha \cdot 4\pi r^2 (2 - \sqrt[3]{4}).$$

$$mc \Delta T = c\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta T = c\rho \cdot \frac{8}{3} \pi r^3 \Delta T.$$

Прирівнюємо праві частини останніх двох рівнянь, і знайдемо ΔT :

$$\Delta T = \frac{3\alpha \cdot (2 - \sqrt[3]{4})}{c\rho \cdot 2r}.$$

Табличні дані для ртуті такі: питома теплоємність $c=138$ Дж/кг·К, густина $\rho=13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, коефіцієнт поверхневого натягу $\alpha=0,5$ Н/м. Підставимо ці значення у формулу для ΔT й отримаємо

$$\Delta T = \frac{3 \cdot 0,5 (2 - \sqrt[3]{4})}{138 \cdot 13,6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1,26}{375,4} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ К}.$$

19.2. Коефіцієнт поверхневого натягу можна визначити методом відривання кільця. Горизонтально підвішене на пружині кільце торкається поверхні води. Під час опускання води кільце відривається за відповідного розтягу пружини. Знайдіть коефіцієнт поверхневого натягу води, якщо сила, необхідна для відривання кільця, $F=64, 2 \cdot 10^{-3}$ Н. Алюмінієве кільце має висоту $h=10$ мм, внутрішній діаметр $d=50$ мм і зовнішній діаметр $d=52$ мм.

Розв'язування. Для відривання кільця потрібна сила F , яка складається з сили тяжіння кільця F_1 і сили поверхневого натягу F_2 : $F=F_1+F_2$. Сила тяжіння кільця

$$F_1 = \rho g h \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2).$$

Сила поверхневого натягу

$$F_2 = \alpha \pi (d_1 + d_2) = F - F_1.$$

Отже,

$$\alpha \pi (d_1 + d_2) = F - \rho g h \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F - \rho gh \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2)}{\pi (d_1 + d_2)} .$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{64,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,785 \cdot (0,052^2 - 0,050^2)}{3,14 \cdot (0,050 + 0,052)} = \\ &= 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.} \end{aligned}$$

Задачі

19.1. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба виконати, щоб збільшити об'єм мильної бульбашки ($\alpha=0,043$ Н/м) у вісім разів? Початковий радіус бульбашки 2 мм.

Відповідь: 5,76 мкДж.

19.2. Капіляр внутрішнім радіусом 2 мм опустили в рідину. Знайдіть коефіцієнт поверхневого натягу рідини, якщо маса рідини, яка піднялася в капілярі, дорівнює $9 \cdot 10^{-5}$ кг.

Відповідь: 0,07 Н/м.

19.3. Комаха водомірка бігає по поверхні води. Знайдіть масу водомірки, якщо відомо, що під кожною з шести лапок комахи утворюється ямка у формі півкулі радіусом 0,1 мм.

Відповідь: 27,5 мг.

19.4. Між двома горизонтальними плоскопаралельними скляними пластинками є 5 г ртуті. Коли на верхню пластинку поклали вантаж масою 5 кг, то відстань між пластинками стала 0,087 мм. Нехтуючи масою пластинки порівняно з масою вантажу, знайдіть коефіцієнт поверхневого натягу ртуті. Вважайте незмочування повним.

Відповідь: 0,5 Н/м.

Розділ 20

ЗМІНА АГРЕГАТНОГО СТАНУ РЕЧОВИНИ

Панівними факторами конкретного агрегатного стану є сили притягання між молекулами і кінетична енергія їхнього теплового руху. Сили притягання між частинками газу слабкі, тому молекули вільно рухаються по всьому об'ємі. Структура кристалічних тіл упорядкована, тут маємо далекий порядок, атоми виконують лише малі коливальні рухи біля вузлів ґратки. Складнішим є тепловий рух частинок рідини, він складається з малих коливань біля положень рівноваги з перескакуванням частинок в інші місця. Для рідини характерний близький порядок. Розглянемо умови, за яких речовина переходить з одного агрегатного стану в інший.

20.1. Фази і фазові переходи

Речовина, залежно від зовнішніх умов, може перебувати у трьох агрегатних станах: твердому, рідкому і газоподібному. Проте, перебуваючи навіть в одному з агрегатних станів, речовина може утворювати термодинамічну систему, яка складається з декількох суміжних одна з одною однорідних частин, що перебувають у фізично різних станах. Такі *фізично однорідні частини, з яких складається система, називають фазами*. Очевидно, що окремі агрегатні стани також утворюють різні фази, однак поняття фази ширше від поняття агрегатного стану. Система, яка складається з двох незмішуваних рідин, є двофазовою системою, однорідна суміш різних газів утворює одну фазу, тверде тіло, утворене з різних кристалічних модифікацій є багатфазовою системою, вода у закритій посудині з кусочками льоду становить трифазову систему: вода – рідка фаза, куски льоду – тверда фаза, суміш водяної пари з повітрям – газоподібна фаза. Неоднорідну

систему, однорідні компоненти (фази) якої чітко виділяються поверхнями поділу, називають гетерогенною.

Можна створити такі умови температури і тиску, за яких речовина перебуватиме у рівновазі в різних фазах, тобто одночасно буде, наприклад, у різних агрегатних станах. Така ситуація простежується у процесі зрідження газу Ван-дер-Ваальса. Ця рівновага двох фаз зображена горизонтальною ділянкою db (див. рис. 15.5) ізотерми Ван-дер-Ваальса, коли у рівновазі перебуває рідина і її пара.

Рівновага двох фаз може бути лише у деякому інтервалі температур, якому відповідають певні значення тисків. На діаграмі P, T стану рівноваги двох фаз відповідає лінія. *Три фази однієї речовини (тверда, рідка, газоподібна) можуть бути у рівновазі лише за одного значення температури і тиску*, яким на діаграмі P, T відповідає точка. Перехід речовини з одної фази в іншу називають фазовим переходом; він відбувається за конкретної температури, яку називають **температурою переходу**. Плавлення, випаровування і сублімація є фазовими переходами першого роду, вони супроводжуються поглинанням або виділенням теплової енергії. Фазові переходи другого роду, наприклад, перехід від однієї кристалічної модифікації кристала до іншої, не супроводжуються вбиранням чи виділенням теплової енергії.

20.2. Випаровування і конденсація

Явище випаровування полягає у відриванні від рідини найшвидших молекул. Щоб молекула могла покинути рідину, повинна бути виконана робота на подолання сил притягання, що діють на молекулу на поверхні рідини з боку внутрішніх молекул, які втягують її всередину. Крім того, під час випаровування речовина, перетворюючись з рідини у пару і збільшуючись в об'ємі, повинна виконати роботу проти сил зовнішнього тиску пари. Уся ця робота виконується завдяки зменшенню кінетичної енергії хаотичного руху молекул рідини, тому температура рідини знижується. Щоб температура рідини під час випаровування була сталою, до неї треба підводити теплову енергію. *Кількість теплової енергії, яку потрібно надавати речовині, щоб перетворити її у пару, з розрахунку на один кілограм випарованої речовини, називають питомою теплотою випаровування*. Вона зале-

жить від температури, зменшуючись з її підвищенням, бо тоді збільшується густина пари (концентрація молекул пари), а отже, зменшується сила, необхідна на відривання молекул з рідини. За критичної температури теплота випаровування дорівнює нулю.

Якщо посудину з рідиною накрити кришкою (рис. 20.1), то поряд з випаровуванням почнеться і зворотний процес – конденсація. У хаотичному русі молекули пари потраплятимуть у рідину і їхня кількість буде прямо пропорційна до густини потоку молекул $n \langle v \rangle$, тобто буде збільшуватися зі збільшенням концентрації молекул у парі. Під час динамічної рівноваги кількість молекул, які конденсуються, буде дорівнювати кількості молекул,

що випаровуються. Пару, яка перебуває в динамічній рівновазі з рідиною, називають **насиченою**, а її тиск – тиском насичення. Про насичену пару вже йшлося у параграфі 15.5, де зазначено найважливіші її властивості. Зауважимо ще раз, що тиск насиченої пари залежить лише від температури і не залежить від об'єму. З підвищенням температури рівновага між двома фазами порушується: кількість молекул, які покидають рідину, прямо пропорційна до кінетичної енергії хаотичного руху молекул, тобто температури, а кількість тих, що конденсуються, – густині потоку молекул, який пропорційний до середньої швидкості хаотичного руху, а отже, до квадратного кореня з температури. Спочатку переважає потік молекул з поверхні рідини у пару, доки тиск насиченої пари не збільшиться настільки, що знову настане динамічна рівновага. Отже, тиск насиченої пари зростатиме з підвищенням температури.

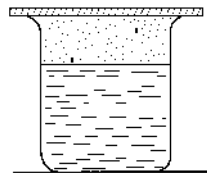


Рис. 20.1. У посудині, накритій кришкою, настає динамічна рівновага пари з рідиною

20.3. Кипіння

Кипінням називають процес інтенсивного перетворення рідини в пару по всьому об'ємі рідини. Воно супроводжується утворенням і зростанням у рідині бульбашок пари з повітрям, які виходять назовні. У рідині завжди є розчинені гази, а на стінках і дні посудини, в якій міститься рідина, – адсорбований газ. Під

час нагрівання рідини цей газ виділяється у вигляді бульбашок, у які йде випаровування рідини. З підвищенням температури тиск насиченої пари в бульбашках підвищується; коли він дорівнює зовнішньому, бульбашка, збільшившись у розмірах, виринає на поверхню і розривається. Отже, під час кипіння рідина випаровується не лише з поверхні рідини, а й усередині – у бульбашки. Температурою кипіння називають ту температуру рідини, за якої тиск її насиченої пари дорівнює зовнішньому тиску на рідину. Що менший зовнішній тиск, то нижча температура кипіння рідини. У горах, на великих висотах, де атмосферний тиск знижений, рідина закипає за нижчих температур, ніж на рівні моря.

Після довгого кипіння, коли в рідині не буде розчинених газів, а отже, центрів кипіння, вона перестане кипіти, й утвориться перегріта рідина. У такому разі в ній за високих температур внаслідок флуктуацій можуть утворитися центри кипіння, що призведе до раптового закипання всієї рідини, тобто до вибуху. Така небезпека можлива, наприклад, у котельнях.

20.4. Сублімація. Плавлення і кристалізація

Випаровування, тобто відривання швидких молекул відбувається не лише з поверхні рідини, а й з поверхні твердого тіла. *Процес відривання швидких молекул з поверхні твердого тіла називають сублімацією.* Теплота сублімації характеризує сили зв'язку між молекулами твердого тіла, вона значно більша від теплоти випаровування і тому тиск насиченої пари над поверхнею твердого тіла завжди малий. Будь-яке тверде тіло, яке створює запах, сублімує, бо молекули, які відірвалися від речовини, потрапляють у наші органи нюху. Особливо це стосується таких речовин, як нафталін. Відомо також про значну сублімацію льоду – мокра білизна сохне на морозі.

Для більшості твердих тіл сублімація за звичайних температур незначна, проте, в принципі, будь-яке тверде тіло сублімує, створюючи над своєю поверхнею відповідний тиск пари. З підвищенням температури сублімація посилюється, зростає тиск насиченої пари, яка перебуває у рівновазі з твердим тілом. У вакуумі сублімація особливо велика, проте домогтися значного збільшення густини насиченої пари твердого тіла неможливо, речовина раніше розплавиться.

Перехід речовини із кристалічного стану у рідкий (плавлення) супроводжується фундаментальною перебудовою структури речовини. Внаслідок нагрівання кристала коливання атомів у вузлах ґратки стають настільки інтенсивними, що кристалічна ґратка руйнується, зникає далекий порядок у розміщенні молекул чи атомів, речовина з кристалічного стану переходить у рідкий (рис. 20.2), відбувається процес плавлення. Для кожної кристалічної речовини є своя температура плавлення і своя теплота плавлення.

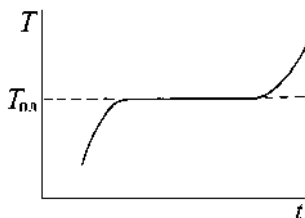


Рис. 20.2. Під час плавлення кристалічних тіл температура є сталою

Питома теплота плавлення – це кількість теплоти, яка потрібна для плавлення одного кілограма твердого тіла за його температури плавлення.

Кожній температурі плавлення відповідає певний тиск. Як звичайно, зростання тиску супроводжується підвищенням температури плавлення. У деяких речовин, наприклад, води, навпаки, під час зростання тиску температура плавлення знижується. Це пов'язане з іншою аномалією води: лід легший від води, тому вода в річках не промерзає до дна. Аномалія льоду (та інших аномальних у цьому плані тіл) пов'язана з його структурою.

Якщо у процесі плавлення припинити підведення теплоти ззовні до кристала, то за такої температури ці дві фази речовини – твердого тіла і рідини – перебуватимуть у динамічній рівновазі.

Процес, зворотний до плавлення, – **кристалізація** – відбувається тоді, коли від рідини відводити теплоту. Проте для кристалізації у рідині повинні бути **центри кристалізації** – система з декількох десятків атомів чи молекул, які розташувались так, як у кристалі. Центрами кристалізації (кристалічними зародками) можуть бути і дрібні кристалики, а також порошинки і домішки сторонніх речовин. Якщо зародків нема, то кристалізація може не відбутися, рідина переохолодиться, однак за великого переохолодження центри кристалізації утворюються спонтанно, і речовина швидко кристалізується.

20.5. Рівняння Клапейрона–Клаузіуса

Кількісний зв'язок між тиском насиченої пари речовини та її температурою відображає рівняння Клапейрона–Клаузіуса. Розрахуємо підвищення тиску насиченої пари ΔP під час зміни її температури на ΔT . Для цього застосуємо малий оборотний цикл Карно 1-2-3-4-1 (рис. 20.3), де за робочу речовину приймемо двофазову систему рідина–насичена пара. Нехай у початковому стані 1 двофазова система має температуру T і тиск P . За сталого тиску будемо ізотермічно розширювати систему (тиск сталий, бо стала температура) і, до того ж, нехай у насичену пару перейшов 1 кг рідини. Під час такого ізотермічного переходу 1-2 система взяла від нагрівника кількість теплоти q , яка дорівнює питомій теплоті пароутворення. Далі зробимо адіабатне розширення системи 2-3; температура знизиться на ΔT , а тиск – на ΔP . Потім систему ізотермічно стиснемо (перехід 3-4), 1 кг пари конденсується у рідину, а вкінці, під час адіабатного стискання (4-1), переведемо

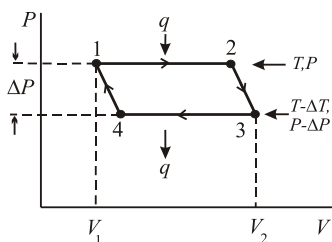


Рис. 20.3. Цикл Карно для двофазової системи рідина – насичена пара

систему у початковий стан. Зміни, яких зазнав 1 кг речовини у прямому циклі Карно, зображено на рис. 20.3.

Позначимо V_1 – питомий об'єм газоподібної фази; V_2 – питомий об'єм рідкої фази, параметри яких, відповідно, будуть T , V_1 і $T - \Delta T$, V_2 . Коефіцієнт корисної дії цього циклу Карно

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}. \quad (20.1)$$

З іншого боку, коефіцієнт корисної дії – це відношення корисної роботи до затраченої теплоти. Робота у цьому циклі зображена на діаграмі P, V площею петлі. Величина ΔP мала, тому петлю можна вважати як прямокутник, і робота

$$\Delta A = \Delta P(V_1 - V_2),$$

а затрачена теплота – q . Отже,

$$\eta = \frac{\Delta P(V_1 - V_2)}{q}. \quad (20.2)$$

Прирівняємо (20.1) і (20.2):

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta P(V_1 - V_2)}{q}.$$

Якщо $\Delta T \rightarrow 0$, то отримаємо **рівняння Клапейрона–Клаузіуса**:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)}. \quad (20.3)$$

Це рівняння пов'язує тиск, за якого у рівновазі перебуває двофазова система, з температурою. Зазначимо, що dP/dT дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої, яка відображає залежність тиску насиченої пари від температури. Для води цей коефіцієнт з підвищенням температури збільшується, що, здавалося б, суперечить формулі (20.3). Проте треба мати на увазі, що різниця $(V_1 - V_2)$, яка є у знаменнику формули (20.3), зменшується з підвищенням температури, бо зменшується питомий об'єм водяної насиченої пари внаслідок збільшення її густини.

Рівняння Клапейрона–Клаузіуса стосується не лише фазового переходу рідина–пара, його можна застосовувати до всіх фазових переходів першого роду. Плавлення, тобто перехід речовини з твердого стану в рідкий, – це інший приклад фазового переходу першого роду. У таких процесах бере участь прихована теплота переходу.

20.6. Діаграма стану

Відобразимо сукупність станів хімічно однорідної речовини на діаграмі в координатах P, T . Як уже зазначено, у термодинаміці доведено, що три фази однієї речовини можуть перебувати у рівновазі лише за єдиних значень температури і тиску, яким на діаграмі P, T відповідає так звана потрійна точка. У цій точці збігаються три криві рівноваги фаз: випаровування, плавлення і сублімації. Діаграму, побудовану на таких засадах, називають **діаграмою стану** речовини (рис. 20.4). Вона є графічним зображен-

ням рівноважних станів речовини за різних значень термодинамічних параметрів і дає інформацію про характер фаз та фазовий склад речовини залежно від низки параметрів.

Криві сублімації, плавлення і випаровування розбивають координатну площину P, T на три ділянки: твердої фази, рідкої і газоподібної. Нахил кривої плавлення залежить від того, яким є процес плавлення. Відповідно до рівняння Клапейрона–Клаузіуса цей нахил визначений виразом dP/dT , він залежить від знака зміни питомого об'єму речовини у фазовому переході. Для більшості речовин об'єм під час плавлення збільшується. Це означає, що зростання тиску призводить до підвищення температури плавлення. Для деяких інших речовин (H_2O , Ge , чавун тощо) об'єм рідкої фази менший від питомого об'єму твердої фази, тут зростання тиску супроводжується зниженням температури плавлення (штрихова лінія на рис. 20.4).

Крива випаровування закінчується у критичній точці K . Це означає, що можливий процес переходу з рідкого стану в газоподібний не через криву

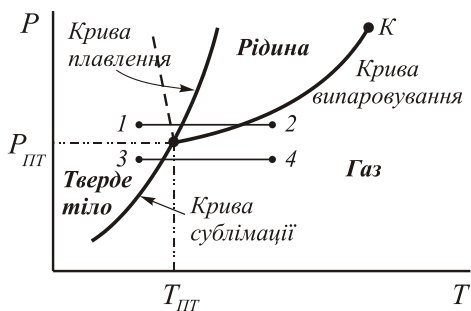


Рис. 20.4. Діаграма стану (фазова діаграма) речовини

випаровування, а в її обхід, через неперервну послідовність однорідних станів без розшарування речовини на дві фази: рідку і газоподібну.

З діаграми видно, що рідина може перебувати у рівновазі з твердим тілом і газом тільки за тисків, не менших від тиску, який відповідає потрійній точці $P_{пт}$. Якщо він менший від атмосферного, то

під час нагрівання за нормального тиску такі речовини переходять з твердої фази у рідку, а потім у газоподібну (перехід 1-2). Наприклад, для води $P_{пт} = 6,1 \cdot 10^2$ Па (4,58 мм рт. ст). Для вуглекислоти (CO_2) $P_{пт} = 5,2 \cdot 10^5$ Па (5,11 атм.), тобто він більший від атмосферного. Тому вуглекислота у рідкому стані за атмосферного тиску існувати не може, вона під час нагрівання сублімує,

переходячи з твердого стану у газоподібний (перехід 3-4, сублімація сухого льоду).

20.7. Аморфні тіла. Полімери

Тіла, які зберігають свою форму, але не мають кристалічної структури, називають аморфними. У них нема далекого порядку в розташуванні молекул, є лише близький порядок, за звичайних умов вони ізотропні. На відміну від кристалічних тіл, вони не мають конкретної температури плавлення, що пояснюють відсутністю кристалічної ґратки. Підвищення їхньої температури збільшує лише рухливість частинок, не змінюючи їхнього взаємного розташування.

До складу аморфних тіл першої групи належать такі тіла, як скло, бурштин тощо. Другу групу утворюють високомолекулярні сполуки або полімери, яким більше властивий аморфний стан. Це речовини з великими ланцюговими молекулами, молярна маса яких може сягати десятків тисяч. Вони побудовані з окремих ланок – мономерів, де міститься певна група атомів, які багато разів повторюються і пов'язаних між собою валентними зв'язками. Полімери бувають лінійні (ланцюгові полімери) або просторові (тривимірні полімери), розгалужені і сітчасті. Полімерами є смоли, каучук, рослинні і тваринні тканини. Відомо багато синтетичних полімерів, фізичні властивості яких мають практичне застосування у побуті й техніці. Сформувалася навіть нова галузь фізики – фізика високомолекулярних сполук.

Полімери поєднують властивості рідин і твердих тіл: гнучкість, пружність; з них виготовляють плівки і волокна. Залежно від температури вони можуть бути склоподібними, високоеластичними і в'язкоплинними. Полімер, який має високу еластичність за температур нижче кімнатної, називають каучукоподібним. Якщо ж температура, за якої починається високоеластична деформація, значно вища від кімнатної, то такий полімер називають пластмасою. Добрі електроізолювальні властивості полімерів пояснюють тим, що в них нема іонних зв'язків; вони хімічно стійкі, бо внутрішньомолекулярний зв'язок їхніх атомів насичений і молекула загалом хімічно нейтральна. Серед пластмас, які широко застосовують у практиці, назвемо поліетилен, поліхлорвініл, полістирол, поліметил-метакрилат. Широко

використовують і синтетичні волокна – капрон, нейлон, силон та ін.

На міцність матеріалів, виготовлених із полімерів, значно впливає структура полімеру. Орієнтовані нитки і плівки з полімерів мають міцність, у десятки разів більшу, ніж неорієнтовані склоподібні полімери (пластмаси) тих самих полімерів. Тому склопластики виготовляють з тонких волокон, склеєних штучними смолами. Такий композиційний матеріал є конструкцією на основі вуглеволокна, епоксидної смоли й органічних матеріалів з високим модулем. Під час "конструювання" таких міцних матеріалів застосовують тканини, які складаються із взаємно перпендикулярних волокон, що слугують арматурою пластиків (текстоліт, склофанера тощо). Вони міцні й легкі. Під час їхнього виготовлення зважають на те, що міцність на розрив того самого матеріалу з розрахунку на одиницю площі поперечного перерізу в багато разів більша для тонкої нитки, ніж для об'ємного зразка. Особлива міцність таких композиційних матеріалів досягається тоді, коли волокна розташовані паралельно одне до одного. Із таких матеріалів виготовляють бронежилети, так побудовані кістки тварин і стовбури дерев.

Важливе значення мають дослідження біополімерів. До них належать амінокислоти – складові частини білків, рибонуклеїнова (РНК) та дезоксирибонуклеїнова (ДНК) кислоти і багато інших органічних сполук.

20.8. Рідкі кристали

Рідкі кристали – це речовини, які поєднують властивості рідини і кристала. Вони мають плинність, можуть утворювати краплі, проте ці краплі видовженої форми, вони подібні до желе. Молекули рідких кристалів подовгуваті, у вигляді паличок або пластинок. Розташування молекул у такій рідині створює порядок, не властивий звичайним рідинам, наприклад, їхні молекули хоч і розташовані хаотично, проте їхня взаємна орієнтація упорядкована, тобто хаотичним є лише теплове поступальне переміщення, а не обертальне. Це спричинює їхню анізотропію, особливо в оптичних властивостях. Багато речовин біологічного походження мають структуру рідких кристалів, наприклад, дезоксирибонуклеїнова кислота, яка несе код спадкової інформації,

мозок, їх можна знайти у м'язових волокнах, у різних функціональних ділянках клітин, серед вірусів.

Зовнішніми особливостями рідкого кристала є мутність, мала в'язкість, анізотропність. Рідкий кристал існує у такому вигляді лише в певному інтервалі температур. Якщо його нагріти, він переходить у звичайну рідину, якщо ж охолодити, – стане кристалом.

За структурою рідкі кристали відрізняються від далекого порядку в розташуванні центрів молекул і в їхній орієнтації. За типом просторової структури їх поділяють на дві групи. Першу групу називають **сметіками**. Вони мають одновимірну просторову упорядкованість. Рідина складається з паралельних рідких шарів, які регулярно йдуть один за одним і відрізняються між собою упорядкованістю структури (рис. 20.5). Друга група – це



Рис. 20.5. Структура сметіків

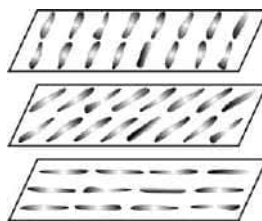


Рис. 20.6. Структура холестеричного типу нематиків

нематик, вони мають не просторову, а орієнтаційну упорядкованість молекул, дуже витягнуті; орієнтаційна упорядкованість виникає внаслідок переважної орієнтації цих довгих молекул.

Різновидом нематичних рідких кристалів є **холестеричні** кристали. Тут у розподілі центрів мас молекул нема далекого порядку, як і в нематиків, а під час переходу від однієї ділянки речовини до іншої напрям переважної орієнтації змінюється, унаслідок чого виникає спіральна структура (рис. 20.6). Спіралі можуть бути як правого, так і лівого обертання. Під час зміни температури ліва спіраль переходить у праву. Зміна орієнтації молекул рідких кристалів відбувається і під впливом електричного й магнітного полів. Це має практичне застосування у пристроях з цифровою індикацією (електронні годинники, дисплеї, індикато-

ри зміни температури тіл тощо). Існує метод візуалізації зображення в ультрафіолетовому випромінюванні.

Перевагами у застосуванні рідкокристалічних плівок у різних приладах є їхня дешевизна і мале значення застосовуваних потужностей та електричних напруг.

Приклад рідкого кристала типу смектиків – розчинене у воді мило. Молекула мила має форму палички; це електричний диполь, який негативним електричним зарядом спрямований до молекули води. Водний розчин мила – це велика кількість подвійних шарів молекул мила, розділених шарами води (рис. 20.7). Негативно зарядженими кінцями молекули мила за-

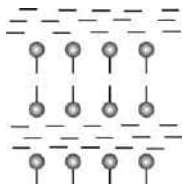


Рис. 20.7. Водний розчин мила – це подвійні шари молекул мила, розділені шарами води

кріплюються на шарах води так, що їхні осі орієнтовані перпендикулярно до цих шарів. Що менша концентрація мила у воді, то більша товщина шарів води.

Подвійні шари рідкого смектичного кристала мають велику рухливість, що визначає мийну властивість мила. Майже всі забруднення (порошинки сажі, жири, масло) є гідрофобні. Коефіцієнт поверхневого натягу води великий ($7,3 \cdot 10^{-2}$ Н/м), тому вода не змочує забруднення, вона не може проникати в пори бруду. Мило – це поверхнево-активна речовина, яка зменшує поверхневий натяг води майже удвічі. Розчин мила, проникаючи в пори, вкриває частинки бруду мильною плівкою, обволікає їх і відділяє від поверхні твердого тіла. Під час невеликої механічної дії вони легко переходять у розчин.

20.9. Розчини

Розчином називають суміш двох або декількох речовин, у якій ці речовини перемішані молекулярно. Речовину, яка в розчині значно переважає за кількістю інші, називають розчинником, а решту – розчиненими речовинами. Розчини з двох речовин називають бінарними. Кількість речовини в розчині переважно характеризують молярною концентрацією, яка визначає відно-

шення кількості молів одної речовини в розчині до загальної кількості молів розчину. Інакше кажучи, це частка молекул одної речовини щодо повної кількості молекул у розчині. Користуються також відношенням мас компонент, які містяться в розчині.

Процес розчинення відбувається з виділенням або поглинанням теплової енергії. **Теплотою розчинення** називають таку кількість теплової енергії, яка виділяється або поглинається під час розчинення 1 моля речовини у настільки великій кількості розчинника, що подальше розведення розчину вже не змінює теплового ефекту. Теплова енергія розчинення визначається енергією, що витрачається на розривання зв'язків у молекулах розчинюваної речовини і розчинника, з одного боку, і енергією, яка вивільняється під час утворення молекулярних комплексів, з іншого боку, якщо сили притягання між молекулами розчинника і розчинюваної речовини значні. Якщо під час розчинення енергія розривання зв'язків між складовими молекул розчинюваної речовини і розчинника більша від енергії утворення молекулярних комплексів, то відбувається охолодження розчину, в іншому разі – нагрівання. Наприклад, теплота розчинення нашати-рного спирту (NH_4Cl) у воді становить $-16\,500$ Дж, а сірчаної кислоти (H_2SO_4) $+75\,000$ Дж. У газах взаємодія між молекулами дуже мала, тому їхнє розчинення відбувається з виділенням теплоти. Крім теплових ефектів, розчинення супроводжується також зміною кольору, об'єму тощо. Для конкретного розчинника вони специфічні стосовно кожної розчинюваної речовини.

Розчинність речовин у розчинах переважно має межі. Розчин, у якому є найбільша кількість розчиненої речовини у розчиннику, називають **насиченим**.

У загальному випадку розчинність залежить від температури. Якщо процес розчинення супроводжується поглинанням теплової енергії, то розчинність збільшується з підвищенням температури, і навпаки, якщо в процесі розчинення виділяється теплота, то підвищення температури спричинює зменшення розчинності.

Розчинність газів у рідинах за конкретної температури залежить від тиску. Очевидно, що між розчином і газом (насиченою парою розчиненої речовини) повинна бути динамічна рівновага: молекули газу в стані такої рівноваги переходитимуть з газу в розчин, і навпаки. Звідси впливає **закон Генрі: чим більший**

тиск газу над розчином, тим більша концентрація молекул газу в розчині, інакше кажучи, розчинність газу пропорційна до тиску газу над розчином. Цей закон стосується лише слабких (розведених) розчинів, коли кількість молекул розчиненої речовини мала порівняно з кількістю молекул розчинника. Він, наприклад, справджується для погано розчинюваних у воді кисню й азоту, але не придатний для вуглекислого газу й аміаку, які добре розчиняються у воді.

Закон Генрі можна застосовувати не лише до розчинених у рідинах газів, а й до будь-яких слабких розчинів. Тоді він характеризуватиме концентрацію речовини в розчині, якщо над розчином є певний тиск насиченої пари.

Закон, який відображає залежність тиску насиченої пари від кількості розчиненої у розчині речовини, називають **законом Рауля** для слабких розчинів. За цим законом *тиск насиченої пари розчиненої речовини над розчином знижується в стільки разів, у скільки разів зменшується концентрація розчиненої в розчині речовини.*

Математичний вигляд закону Рауля такий:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{v_1}{v + v_1},$$

де p_0 – тиск насиченої пари над чистим розчинником; p – тиск насиченої пари над розчином; v – кількість молів розчинника; v_1 – кількість молів розчиненої речовини.

У сильних розчинах сила взаємодії між молекулами розчинника і розчиненої речовини збільшується, що може призвести до відхилення результату від закону Рауля. Крім того, у розрахунках необхідно користуватися правильними молярними масами розчинника і розчиненої речовини, враховуючи факт дисоціації, асоціації і відповідність молярної маси формульній.

Із закону Рауля випливають такі термодинамічні наслідки:

1) зі зниженням тиску насиченої пари розчиненої в розчині речовини підвищується температура кипіння розчину, тобто температура кипіння розведеного розчину вища від температури кипіння чистого розчинника. Це зрозуміло, якщо взяти до уваги, що кипіння настає тоді, коли тиск насиченої пари дорівнює зовнішньому тиску. А оскільки тиск над розчином менший від тиску

чистого розчинника, то розчин потрібно нагріти до вищої температури, щоб він закипів за заданого зовнішнього тиску;

2) зі зниженням тиску насиченої пари над розчином підвищується температура замерзання розчину, або, інакше кажучи, температура замерзання розведеного розчину нижча від температури замерзання чистого розчинника. Це означає, що розчини замерзають за нижчих температур, ніж сам розчинник. Наприклад, вода океанів, яка має 3,5% розчинених солей, замерзає лише за температури $t = -1,9^{\circ}\text{C}$. Отже, розчини замерзають за нижчої температури, ніж чистий розчинник, до того ж, зниження точки замерзання залежить від концентрації розчину.

20.10. Осмотичний тиск

Є речовини, що мають вибірккову дифузійну здатність. Тонкі плівки з таких речовин проникні для води, але не проникні для речовин, розчинених у воді. Розглянемо такий дослід. У посудині, розділеній целофановою перегородкою, в одній частині міститься який-небудь розчин, наприклад, розчин цукру у воді, а в іншій – чиста вода. Целофанова перегородка має вибірккову пропускну здатність, вона пропускає молекули води і не пропускає молекул цукру. У загальному випадку, коли стикають два розчини різних концентрацій, відокремлених напівпроникною перегородкою, то виникає **явище осмосу**, яке полягає в тому, що напівпроникна перегородка пропускає молекули розчинника і перешкоджає проходженню частинок розчиненої речовини. Такими напівпроникними перегородками можуть бути плівки тваринного і рослинного походження, колоїдні та деякі інші. У нашому досліді можна зауважити, що через деякий час рівень розчину почне підніматися, а рівень води – опускатися. У стані рівноваги матимемо різницю між цими рівнями, що пояснюється існуванням **осмотичного тиску**. Тиск на перегородку, зумовлений ударами по ній молекул розчинника з обох боків, однаковий. Що стосується тиску розчиненої речовини, то він не передається розчиннику на інший бік перегородки. Виникає ситуація, коли молекули розчинника вільно взаємодіють між собою через напівпроникну плівку, а розчиненої речовини – не взаємодіють. Уважають, що проникання молекул через напівпроникну перегородку відбувається шляхом їхнього попереднього розчинення в

ній. Тому властивість напівпроникності зумовлена не розмірами пор перегородки, а різною розчинністю її матеріалу стосовно окремих речовин, які стикаються з нею. Взагалі характер такої взаємодії досить складний і ще не з'ясований до кінця.

Розглянемо закономірності цього явища. У слабкому розчині відстані між молекулами розчиненої речовини великі порівняно з розмірами молекул, тому взаємодії між ними нема. Отже, молекули розчиненої речовини в слабкому розчині можна трактувати як молекули ідеального газу. За аналогією між ідеальним газом і розчиненою речовиною у слабкому розчині вважатимемо, що тиск, який чинять молекули розчиненої речовини, можна визначити з формули для тиску ідеального газу:

$$P_{\text{осм}} = nkT = \frac{NkT}{V} = \nu \frac{RT}{V}, \quad (20.4)$$

де N – загальна кількість молекул розчиненої речовини в об'ємі V ; ν – кількість молів. Формула (20.4) виражає закон **Вант-Гоффа**: *осмотичний тиск слабких розчинів залежить не від природи розчинника і розчиненої речовини, а лише від молярної концентрації розчиненої речовини.*

Явище осмосу відіграє надзвичайно важливу роль у процесах життєдіяльності, зокрема в явищах розподілу води в організмі тварин і рослин. Оболонки і перегородки клітин тваринних і рослинних організмів є напівпроникними, вони пропускають воду і не пропускають складних органічних сполук. Тому всередині клітини маємо розчин, і тут створюється осмотичний тиск, який може сягати декілька атмосфер. Наприклад, осмотичний тиск крові людини становить близько 7,5 атм., а клітин багатьох рослин – 5–20 атм. Завдяки цьому вода переходить з ґрунту в коріння, а звідси в стовбури дерев на значну висоту. З осмосом ми стикаємося і в побуті, наприклад, у солінні і маринуванні овочів, у цукроварінні тощо.

20.11. Сплави і тверді розчини

У промисловому виробництві різних предметів, машин чи обладнання здебільшого застосовують не чисті хімічні метали, а їхні комбінації. Наука про способи комбінування різних елементів для отримання матеріалів з потрібними властивостями є важливою складовою частиною в комплексі інженерних дисци-

плін, бо ці матеріали відіграють важливу роль в економіці. До таких комбінованих матеріалів належать сплави і тверді розчини. Їх утворюють змішуванням між собою розплавлених металів чи інших речовин. У процесі їхнього виготовлення рідкий розчин різних компонент охолоджують і за певної температури починається кристалізація спочатку одної, а потім іншої компоненти. Отримують тверде тіло, яке складається з кристаликів, що міцно пов'язані між собою. Властивості утвореної твердої фази дуже залежать від компонент розчину і їхнього співвідношення. Тут можливі такі випадки.

1. Новоутворена тверда фаза складається з суміші чистих кристаликів окремих компонент речовини. Таку тверду речовину називають **сплавом**. Це, наприклад, сталь, яка є сплавом заліза з вуглецем, хоча в склад сталі переважно входять і марганець, нікель, вольфрам чи кобальт. Головною складовою частиною дюралюмінієвих сплавів є алюміній з додаванням міді, кремнію чи магнію.

Можна створити таке конкретне співвідношення між компонентами рідкого розчину, що кристалізація компонент почнеться рівночасно. Склад такого рідкого розчину називають **евтектичним**, а сплав, отриманий унаслідок кристалізації, – **евтектичним сплавом**, або просто **евтектикою**. Прикладом евтектичного сплаву є сплав свинцю (86%) і сурми (14%). Температура плавлення цього евтектичного сплаву нижча від температури плавлення кожного з компонент і становить 513 К. Властивість зниження температури плавлення евтектичного сплаву широко застосовують для отримання легкоплавких сплавів. Наприклад, м'який припій, який складається з однакових частин олова і свинцю, плавиться за температури 200°C, тоді як олово – за температури 232°C.

Подібно поведуться і розчини твердих тіл у рідинах. Наприклад, евтектичний розчин кухонної солі у воді (22% NaCl і 78% води) кристалізується за температури -21,2°C. Якщо змішати кухонну сіль зі снігом, то почнеться процес плавлення снігу, сама суміш буде охолоджуватися аж до температури близько -21°C.

2. Під час зниження температури рідкого розчину може утворитися тверда фаза, яка складається з кристаликів, побудованих з атомів обох компонент речовини. Таку тверду речовину

називають **твердим розчином**. Кристалічна структура такого твердого розчину безпосередньо пов'язана зі структурою одної або іншої його компоненти.

Розрізняють тверді розчини заміщення і впровадження.

До твердих розчинів типу **заміщення** належить більшість твердих розчинів. Це, переважно, металічні тверді розчини, наприклад, латунь, золото проби 585 (золото + мідь), деякі нержавіючі сталі. Для цих твердих розчинів характерне те, що будь-яке місце у ґратці може бути зайняте атомами як одної, так і іншої компоненти.

У твердих розчинах типу **впровадження** атоми розчиненої речовини вкорінюються в кристалічну ґратку між атомами розчинника, дещо розсуваючи їх. Інакше кажучи, вони займають у ґратці місця, які у чистому розчиннику не були зайняті. Тверді розчини типу впровадження утворюють, наприклад, водень, азот, вуглець у таких металах, як залізо, нікель, вольфрам або титан. Утворений твердий розчин завжди має таку ж структуру, як і метал, проте його ґратка збільшена за розміром порівняно з ґраткою чистого металу.

Атоми впровадження розчиненого елемента в твердих розчинах зумовлюють міцність конструкцій і будівельних матеріалів.

20.12. Поняття про старіння та загартовування матеріалів

У багатьох твердих розчинах рівноважна концентрація складових компонент дуже залежить від температури. Під час охолодження з такої рівноважної двокомпонентної системи виділяється надлишок одної з компонент, що призводить до розпаду однофазової системи на двофазову. Це дифузний процес, який відбувається внаслідок значної рухливості атомів за заданої температури. Він може відбуватися і без охолодження під час витримування зразка й за кімнатної температури. Такий процес називають старінням матеріалу. Унаслідок старіння змінюються механічні й фізичні властивості речовини. Старіння матеріалу часто застосовують у промисловості для поліпшення низки властивостей матеріалів, наприклад, для збільшення міцності алюмінієвих, мідних і нікелевих сплавів. У деяких випадках

старіння матеріалу є небажаним процесом, який призводить до збільшення крихкості деталей.

Виділенню надлишкової компоненти з твердого розчину може запобігти загартовування матеріалу. Загартовування – це процес швидкого охолодження речовини з метою запобігання розвиткові процесів переходу із рівноважного стану за високої температури в стан стійкої рівноваги за низької температури, тобто запобігання небажаних процесів, що відбуваються під час повільного охолодження. Загартовування фіксує метастабільний пересичений стан твердого розчину, бо за низької температури не відбувається дифузії. Загартовування застосовують за умови, що рівноважний стан твердого розчину за високих температур відрізняється кристалічною структурою, складом або порядком розташування атомів у ґратці від рівноважного стану за низьких температур. Важливу роль відіграє швидкість охолодження матеріалу.

У техніці найчастіше застосовують загартовування сталі – сплаву заліза і вуглецю. Метою загартовування є запобігання переходу одної структури сталі, так званої мартенситної структури, під час повільного її охолодження в іншу структуру, яка має гірші механічні властивості. Загартовування зберігає мартенситну структуру до відповідно низьких температур, і сталь набуває підвищеної міцності й твердості порівняно зі сталлю, яку не загартовували.

Деякі сплави безпосередньо після загартовування певний час підтримують за температури, дещо вищої від кімнатної (цей процес називають відпуском), прискорюючи швидкість старіння. Після загартовування і старіння структура матеріалу є твердим розчином, у якому рівномірно розподілені або субмікроскопічні ділянки, збагачені атомами розчиненої речовини, або частинки другої фази. Такі матеріали набувають високих механічних властивостей, бо в них затруднений рух дислокацій. Тому матеріали, які піддавали загартовуванню з наступним старінням, широко застосовують як конструктивні та жаростійкі елементи.

Контрольні запитання

1. Що називають фазою в термодинаміці?
2. Яка різниця між фазовими переходами першого і другого роду?
3. Чим відрізняється кипіння від випаровування?

4. Що таке потрійна точка?
5. Яке тіло називають аморфним?
6. Чим пояснити добрі мийні властивості мила?
7. Що називають розчином?
8. Яке формулювання закону Генрі, закону Рауля?
9. Яка різниця між сплавом і твердим розчином?
10. Які знаєте способи отримання матеріалів з високими механічними властивостями?

Приклади розв'язування задач

20.1. Знайдіть питому теплоту випаровування води за температури 5°C.

Розв'язування. Випаровування – це фазовий перехід першого роду, воно підпорядковане рівнянню Клапейрона–Клаузіуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)},$$

де p – тиск насиченої пари за температури T ; q – питома теплота випаровування; V_1 – питомий об'єм газоподібної фази; V_2 – питомий об'єм рідкої фази.

Будемо вважати, що в околі точки температури 5°C маємо лінійну залежність q від T . Тоді для невеликого інтервалу температур це рівняння можна переписати так:

$$q = \frac{\Delta p}{\Delta T} T(V_1 - V_2) = \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1} T(V_1 - V_2), \quad (1)$$

де p_1 і p_2 – тиски насиченої пари при температурах T_1 і T_2 , відповідно. Щоб обчислити значення q при температурі 5°C, з таблиць візьмемо значення тисків насиченої пари при температурах $t_1=4^\circ\text{C}$ і $t_2=6^\circ\text{C}$, відповідно, і підставимо в рівняння (1). Однак спочатку знайдемо значення об'ємів V_1 і V_2 . Очевидно, що V_2 – це об'єм 1 кг води, тобто $V_2=10^{-3}$ м³/кг. Для визначення питомого об'єму насиченої пари застосуємо рівняння Клапейрона–Менделєєва (для 1 кмоль) $V_1=RT/p\mu$, де p – тиск насиченої пари при температурі T , $p=870$ Па, μ – молярна маса води. Отже,

$$V_1 = \frac{8,31 \cdot 278,3}{870 \cdot 0,018} = 1,5 \cdot 10^2 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Як бачимо, $V_2 \ll V_1$, тому рівняння (1) перепишемо так:

$$q = \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1} T V_1 = \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1} \cdot T^2 \frac{R}{p\mu}.$$

Підставимо табличні значення $p=870$ Па, $p_1=811$ Па, $p_2=932$ Па й отримаємо остаточно

$$q = \frac{932 - 811}{279,3 - 277,3} \cdot 278,3^2 \cdot \frac{8,31}{870 \cdot 0,018} = 24,7 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг.}$$

20.2. Тиск насиченої пари над розчином у 1,02 раза менший від тиску насиченої пари чистої води. Яка кількість молекул води припадає на одну молекулу розчиненої речовини?

Розв'язування. Застосуємо закон Рауля

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{v_1}{v + v_1}.$$

За умовою задачі $p=p_0/1,02$. Тут p_0 – тиск насиченої пари чистої води; p – тиск насиченої пари над розчином; v – кількість речовини розчинника (води); v_1 – кількість розчиненої речовини. Отже, маємо

$$1 - \frac{1}{1,02} = \frac{v_1}{v + v_1} \quad \text{або} \quad \frac{v + v_1}{v_1} = \frac{v}{v_1} + 1 = \frac{1,02}{0,02},$$

звідки

$$v/v_1=50.$$

20.3. У 0,5 л води розчинено 2 г кухонної солі. Ступінь дисоціації молекул кухонної солі становить 75%. Знайдіть осмотичний тиск розчину за температури 17°C.

Розв'язування. Осмотичний тиск розчину визначимо за формулою Вант-Гоффа

$$p_{\text{осм}} = \frac{vRT}{V} = \frac{m_1}{\mu_1 V} RT.$$

Тут $m_1/\mu_1 V$ – кількість недисоційованих молекул в одиниці об'єму розчинника. У нашій задачі 75% молекул дисоціювали, тому кількість частинок, що припадають на одиницю об'єму розчинника, буде $1+0,75=1,75$. Отже,

$$p_{\text{осм}} = \frac{m_1}{\mu_1 V} 1,75 \cdot RT \Rightarrow p_{\text{осм}} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,75}{58 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} 8,38 \cdot 290 = 0,29 \text{ МПа.}$$

Задачі

20.1 Нелетну речовину (100 г) розчинили в 1 л води. Температура розчину 90°C , тиск насиченої пари над розчином 68,6 кПа. Визначте молярну масу розчиненої речовини.

Відповідь: 0,092 кг/моль.

20.2. У 0,5 л води розчинено 10 г цукру ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$) при температурі 40°C . Знайдіть осмотичний тиск розчину.

Відповідь: $1,52 \cdot 10^5$ Па.

20.3. Осмотичний тиск розчину при температурі 87°C дорівнює $1,65 \cdot 10^5$ Па. Яка кількість молекул води припадає на одну молекулу розчиненої речовини?

Відповідь: 1000.

Список літератури

1. *Акоста Л., Кован К., Грэм Б.* Основы современной физики. – М.: Просвещение, 1982.
2. *Детлаф А.А., Яворский Б. М.* Курс физики. – М.: Высш. шк., 1989.
3. *Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П.* Загальний курс фізики Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Техніка, 1999.
4. *Матвеев О. М.* Механіка і теорія відносності. – К.: Вища шк., 1993.
5. *Матвеев О. М.* Молекулярная физика. – М.: Высш. шк., 1987.
6. *Савельев И. В.* Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1989.
7. *Россель Ж.* Общая физика. – М.: Мир, 1964.

Навчальне видання

Роман Михайлович Кушнір

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
Механіка. Молекулярна фізика

Навчальний посібник
для студентів нефізичних спеціальностей вищих
навчальних закладів

Редактор М.М. Мартиняк
Технічний редактор С.З. Сенік
Коректор М.В. Ревега
Комп'ютерна верстка Н.М. Лобач

Підп. до друку 05.06. 2003. Формат 60×90/16.
Папір офс. Друк. офсет. Гарнітура Times New Roman.
Умовн. друк. арк. 25,3. Обл.-вид. арк. 26,4.
Тираж 1000 прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.

Надруковано з готових діапозитивів у Жовківській друкарні
ВВП „Місіонер”
80300, Львівська обл., м. Жовква, вул. Василянська, 8.

РОЗДІЛ 20 ЗМІНА АГРЕГАТНОГО СТАНУ РЕЧОВИНИ ...	377
20.1. Фази і фазові переходи	377
20.2. Випаровування і конденсація	378
20.3. Кипіння.....	379
20.4. Сублімація. Плавлення і кристалізація	380
20.5. Рівняння Клапейрона–Клаузіуса.....	382
20.6. Діаграма стану	383
20.7. Аморфні тіла. Полімери.....	385
20.8. Рідкі кристали.....	386
20.9. Розчини.....	388
20.10. Осмотичний тиск.....	391
20.11. Сплави і тверді розчини.....	392
20.12. Поняття про старіння та загартовування матеріалів.....	394
Контрольні запитання	395
Приклади розв’язування задач	396
Задачі	398
Список літератури	399
Предметний покажчик.....	406

Предметний покажчик

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| Абсолютна шкала температури 238 | – – скалярний 19 |
| Абсолютно тверде тіло 22 | Довжина середня вільного |
| Автоколивання 184 | пробігу 260 |
| Агрегатні стани 362,377 | Дослід Штерна 256 |
| Аморфне тіло 385 | |
| Анізотропія 349 | Евтектика 393 |
| | Енергія 101 |
| Бел (одиниця) 206 | – внутрішня 303, 305, 316 |
| Биття 166 | – вільна 343, 368 |
| | – гармонічного |
| Вага тіла 51 | осцилятора 168, 352 |
| Вакуум 279 | – зв'язана 343 |
| Ват (одиниця) 102 | – кінетична 102, 103 |
| Вектор 16 | – потенціальна 105 |
| – аксіальний 31 | – пружної деформації 109 |
| – одиничний 18 | – спокою 229 |
| – Умова 205 | Ентальпія 308 |
| Випаровування 378 | Ентропія 333, 338 |
| В'язкість газу 272 | Ефект Джоуля–Томсона 318 |
| | – Доплера 211 |
| Газ ідеальний 235, 237 | Ефузія 286 |
| – реальний 279 | |
| Гармонічний осцилятор 156, 352 | Закон Архімеда 130 |
| Герц (одиниця) 154 | – Авогадро 240 |
| Гіроскоп 100 | – Бойля–Маріотта 237 |
| Гравітація 48,49 | – Вант–Гоффа 392 |
| – штучна 71 | – взаємозв'язку маси й |
| Гradient 111 | енергії 239 |
| Гратка кристалічна 348, 350 | – всесвітнього тяжіння 50 |
| | – Гей–Люссака 237 |
| Декремент згасання 175 | – Генрі 390 |
| Деформація 61, 60 | – Гука 61, 62 |
| Дефекти кристалів 351 | – Дюлонга і Піті 357 |
| Джоуль (одиниця) 102 | – збереження енергії 101 |
| Дисипація енергії 120 | – – імпульсу 97 |
| Дислокації 351 | – – механічної енергії 112 |
| Дифузія 265, 269, 365 | – – моменту імпульсу 98 |
| Діаграма стану 383 | – Ньютона I 37 |
| Добуток векторів векторний 19 | – Ньютона II 38 |

- Ньютона III 40
- основний динаміки
обертального руху 81, 85
- розподілу енергії за
ступенями вільності 250
- Рауля 390
- Фіка 266
- Фур'є 267
- Змочування 369
- Знецінення енергії 344
- Зрідження газів 321
- Імпульс тіла 39
 - сили 40
- Інваріант 43
- Інертність 38
- Інтервал 222
- Інфразвук 210
- Кавітація 209
- Кипіння рідини 379
- Коефіцієнт в'язкості 267, 273
 - дифузії 266, 272
 - згасальних коливань 175
 - корисної дії теплової
машини 328, 329
 - поверхневого натягу 366
 - теплопровідності 268, 275
 - тертя 57, 58
- Коливання 152
 - вільні 158
 - вимушені 177
 - гармонічні 153
 - зв'язані 184
 - згасальні 172
- Комірка елементарна
кристалічна 349
- Конвекція 300
- Кристали атомні 350
 - іонні 350
 - металічні 350
 - молекулярні 350
 - рідкі 386
- Манометр іонізаційний 282
 - Мак-Леода 283
 - термоелектричний 282
- Маса 38
 - атомна 234
 - гравітаційна 53
 - зведена 188
 - інертна 53
 - спокою 225
- Машина теплова 325
- Маятник математичний 162
 - фізичний 160
- Меніск 372
- Метод векторних діаграм 164
 - молекулярно-кінетичний
(статистичний) 232
 - термодинамічний 233
- Мікростан 338
- Модуль зсуву 63
 - Юнга 62
- Моль 235
- Момент імпульсу 78, 80
 - інерції 77, 85
 - сили 75, 77
 - пари сил 77
- Монокристал 349
- Напруження нормальне 62
 - тангенціальне 63
- Насос вакуумний дифузійний 280
 - – ротаційний 280
 - – водоструминний 137
- Натяг поверхневий 366
- Невагомість 52
- Незмочування повне 370
- Нерівність Клаузіуса 333
- Одиниці вимірювань основні 14
- Одночасність подій 219
- Осмос 391
- Осцилятор гармонічний 156, 352
- Пара волога 297, 379
 - насичена 379

- пересичена 295
- Пара сил 77
- Параметри термодинамічної системи 233
- Переміщення 24
- Перетворення Лоренца 217
- Перехід фазовий 377
- Піднімальна сила 143
- Поле сил 49
 - тяжіння 49
- Полікристал 349
- Порядок близький 364
 - далекий 348
- Потужність 102
- Принцип незалежності дії сил (суперпозиції) 39
 - відносності Галілея 41
 - термодинаміки другий 340
 - – перший 304
 - – третій 341
- Прискорення 26
 - кутове 32
 - нормальне 28
 - тангенціальне 27
- Процес адіабатний 310
 - ізобарний 308, 314
 - ізотермічний 315
 - ізохорний 307, 314
 - коловий 325
 - необоротний 302
 - оборотний 301
 - політропний 313
- Радіус-вектор 20
 - кривини 28
 - молекулярної дії 366
- Резонанс механічний 183
- Рівновага тіла 83, 120
- Рівняння адіабати 312
 - Бернуллі 133
 - Ван-дер-Ваальса 292
 - динаміки обертального руху 82, 85
 - Клапейрона–Клаузіуса 383
 - Клапейрона–Менделєєва 240
 - Майєра 309
 - Мещерського 47
 - нерозривності 133
 - основне кінетичної теорії газів 243, 246
 - політропи 313
 - Пуассона 312
 - руху 39
 - руху центра мас 46
 - стану ідеального газу 240
- Рідина ідеальна 132
 - перегріта 380
- Робота 101
 - газу 306, 314
- Розподіл Больцмана 259
 - Максвелла 253
- Розчини 388, 394
- Рух броунівський 234
 - реактивний 47
 - центра мас 43
- Сила 38
 - Ван-дер-Ваальса 293
 - інерції 67, 69
 - квазіпружна 160
 - консервативна 104
 - Коріоліса 70
 - лобового опору 143
 - піднімальна крила 145
 - поверхневого натягу 366
 - тертя 57
 - тяжіння 50
- Система відліку інерціальна 38
 - – лабораторна 132
 - – центра мас 132
 - тіл замкнена 43
 - – консервативна 104
 - термодинамічна 233, 300
- Сплави 392
- Стала Больцмана 247
 - газова 240
 - гравітаційна 50
- Стан критичний 295

- метастабільний 295
- рівноважний 233
- Струмінь 132
- Ступені вільності 248
- Сублімація 380
- Температура 247
 - Дебая 359
 - інверсії 320
 - кипіння 379
 - критична 296
- Теорема Нернста 341
 - нерозривності струменя 133
 - Штайнера 87
- Теплоємність 307, 309, 357
- Теплопередача 285, 300
- Теплопровідність 267, 274
- Теплота 304
 - зведена кількість 333
 - фазового переходу 378
- Термодинаміка 300
- Тертя зовнішнє 58
 - внутрішнє 59, 140
 - ковзання 58
 - кочення 58
 - спокою 58
- Течія ламінарна 132
 - стаціонарна 132
 - турбулентна 132
- Тиск критичний 296
 - насиченої пари 297
 - осмотичний 391
 - статичний 136
- Точка матеріальна 21
 - потрійна 384
- Траєкторія 22
- Трубка Піто 137
- Удар абсолютно пружний 118
 - – непружний 119
 - центральний 118
- Фаза коливання 153
 - термодинамічна 377
- Фігури Ліссажу 171

- Фонон 355
- Формула Айнштейна 229
 - барометрична 259
 - Больцмана для ентропії 339
 - Лапласа 372
 - Планка 358
 - Пуазейля 142, 143
 - Стокса 145
 - Торічеллі 149
- Хвиля 194
 - біжуча 195
 - плоска 196
 - поздовжня 194
 - поперечна 194
 - стояча 200
 - сферична 196
- Центр мас 43
- Цикл Карно 326
 - оборотний 326
 - коловий 325
- Час релаксації 365
- Частота биття 167
 - коливання 154
 - коливань власна 156, 159
 - резонансна 182
- Число Авогадро 235
 - Рейнольдса 132, 146
 - ступенів вільності 248
- Шар суміжний 144, 294
- Швидкість 24
 - друга космічна 56
 - кутова 31
 - миттєва 25
 - молекул газу
 - найімовірніша 254
 - – середня арифметична 254
 - – – квадратична 248
 - перша космічна 56
 - третя космічна 57
- Явища капілярні 372

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ВСТУП.....	4
1. Предмет фізики та її зв'язок з іншими науками і технікою.....	4
2. Одиниці фізичних величин та їхні розмірності.....	5
3. Вектори та їхні властивості.....	7
 ЧАСТИНА I	
ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ.....	13
 Розділ 1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА.....	13
1.1. Механічний рух.....	13
1.2. Способи опису руху точки.....	14
1.3. Швидкість.....	16
1.4. Прискорення.....	18
1.5. Кінематика твердого тіла.....	22
1.6. Кутова швидкість. Кутове прискорення.....	23
Контрольні запитання.....	25
Приклади розв'язування задач.....	25
Задачі.....	28
 Розділ 2 ЗАКони ДИНАМІКИ.....	29
2.1. Закони Ньютона.....	29
2.2. Принцип відносності Галілея.....	33
2.3. Система матеріальних точок. Рух центра мас системи.....	35
2.4. Швидкість центра мас системи.....	37
2.5. Рух тіл змінної маси.....	39
2.6. Види сил. Фундаментальні сили.....	40
2.7. Сили у механіці. Гравітаційні сили.....	41
2.8. Інертна і гравітаційна маси.....	45
2.9. Припливи.....	46
2.10. Космічні швидкості.....	48

2.11. Сили тертя	50
2.12. Пружні сили. Види деформацій	52
2.13. Деформація розтягу	53
2.14. Деформація зсуву	55
Контрольні запитання	56
Приклади розв'язування задач	57
Задачі	58
 Розділ 3 НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ	59
3.1. Сили інерції	59
3.2. Сили інерції у поступальному русі системи відліку	61
3.3. Відцентрова сила інерції	61
3.4. Сила Коріоліса	63
3.5. Штучна гравітація	64
Контрольні запитання	65
Приклади розв'язування задач	65
Задачі	67
 Розділ 4 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА	68
4.1. Момент сили	68
4.2. Момент інерції	70
4.3. Момент імпульсу	71
4.3.1. Момент імпульсу матеріальної точки	71
4.3.2. Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі	73
4.4. Основний закон динаміки обертального руху	74
4.4.1. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі	75
4.4.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки	77
4.5. Обчислення моменту інерції твердого тіла	79
4.6. Теорема Штайнера	81
4.7. Вільні осі	83
4.8. Поняття про тензор інерції	85
Контрольні запитання	88
Приклади розв'язування задач	88
Задачі	89
 Розділ 5 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ	90

5.1. Закон збереження імпульсу.....	90
5.2. Закон збереження моменту імпульсу.....	92
5.3. Поняття про гіроскоп.....	94
5.4. Енергія, робота, потужність.....	95
5.5. Кінетична енергія поступального руху.....	97
5.6. Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.....	98
5.7. Консервативні сили.....	99
5.8. Потенціальна енергія.....	100
5.9. Потенціальна енергія у деяких випадках.....	101
5.9.1. Потенціальна енергія у полі тяжіння Землі.....	101
5.9.2. Потенціальна енергія тіла у гравітаційному полі.....	102
5.9.3. Потенціальна енергія пружної деформації.....	104
5.10. Зв'язок між потенціальною енергією і консервативною си- лою.....	105
5.11. Закон збереження механічної енергії.....	106
Контрольні запитання.....	108
Приклади розв'язування задач.....	108
Задачі.....	110
 Розділ 6 ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ.....	112
6.1. Зіткнення.....	112
6.2. Потенціальна крива. Стан рівноваги тіла.....	115
6.3. Закони збереження у найпростіших хімічних реакціях.....	117
6.3.1. Закон збереження імпульсу.....	117
6.3.2. Система координат центра мас.....	118
6.3.3. Реакційна здатність молекул.....	119
6.3.4. Енергія активації.....	120
Контрольні запитання.....	122
Приклади розв'язування задач.....	122
Задачі.....	124
 Розділ 7 МЕХАНІКА РІДИН.....	125
7.1. Закони гідростатики.....	125
7.2. Гідродинаміка. Течія рідини.....	126
7.3. Рівняння нерозривності.....	128

7.4. Рівняння Бернуллі.....	129
7.5. Застосування рівняння Бернуллі.....	132
7.5.1. Горизонтальний потік.....	132
7.5.2. Вимірювання швидкості потоку.....	133
7.6. Застосування закону збереження імпульсу до руху рідини	134
7.7. Течія в'язкої рідини по трубі.....	135
7.7.1. В'язкість рідин.....	135
7.7.2. Формула Пуазейля.....	137
7.8. Рух тіл у рідині та газі.....	139
7.9. Піднімальна сила крила.....	141
7.10. Уявлення про теорію механічної подібності.....	142
7.11. Аеродинаміка надзвукових швидкостей.....	143
Контрольні запитання.....	145
Приклади розв'язування задач.....	145
Задачі.....	147
 Розділ 8 КОЛИВАННЯ.....	 148
8.1. Кінематика коливань.....	148
8.2. Швидкість і прискорення у коливальному русі. Рівняння гармонічного осцилятора.....	150
8.3. Зображення гармонічних коливань у комплексній формі	153
8.4. Динаміка гармонічних коливань. Вільні коливання.....	155
8.5. Фізичний маятник.....	156
8.6. Математичний маятник.....	159
8.7. Енергія гармонічного коливання.....	159
8.8. Додавання коливань. Метод векторних діаграм.....	161
8.9. Биття.....	163
8.10. Додавання взаємно перпендикулярних коливань.....	165
8.11. Фігури Ліссажу.....	168
8.12. Згасальні коливання.....	169
8.13. Вимушені коливання.....	175
8.14. Поняття про коливання зв'язаних систем.....	182
8.15. Коливання молекули.....	186
8.16. Поняття про розклад Фур'є.....	188
Контрольні запитання.....	189

Приклади розв'язування задач.....	189
Задачі.....	192

Розділ 9 ПРУЖНІ ХВИЛІ.....	193
9.1. Характеристика хвилі.....	193
9.2. Рівняння плоскої хвилі.....	194
9.3. Поширення хвиль у пружному середовищі.....	196
9.4. Стоячі хвилі.....	198
9.5. Енергія пружної хвилі. Потік енергії.....	202
9.6. Звукові хвилі.....	205
9.6.1. Об'єктивні характеристики звуку.....	205
9.6.2. Суб'єктивні характеристики звуку.....	207
9.7. Ультразвук. Кавітація. Застосування ультразвуку.....	209
9.8. Інфразвук.....	211
9.10. Ефект Доплера.....	211
Контрольні запитання.....	213
Приклади розв'язування задач.....	213
Задачі.....	214

Розділ 10 ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ.....	216
10.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца.....	216
10.2. Наслідки з перетворень Лоренца.....	218
10.2.1. Скорочення довжини тіла.....	218
10.2.2. Одночасність подій.....	220
10.2.3. Сповільнення часу.....	221
10.3. Інтервал між подіями.....	223
10.4. Релятивістський закон додавання швидкостей.....	225
10.5. Релятивістський імпульс.....	226
10.6. Релятивістська кінетична енергія.....	228
10.7. Повна енергія тіла і енергія спокою.....	230
Контрольні запитання.....	231
Приклади розв'язування задач.....	231
Задачі.....	232

ЧАСТИНА II.....	233
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА.....	233
Розділ 11 ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ.....	233
11.1. Молекулярно-кінетичний та термодинамічний методи опису явищ природи.....	233
11.2. Термодинамічні параметри. Стан системи.....	234
11.3. Оцінка мас і розмірів молекул.....	235
11.4. Ідеальний газ.....	237
11.5. Закони ідеального газу.....	238
11.6. Рівняння стану ідеального газу.....	240
Контрольні запитання.....	242
Приклади розв'язування задач.....	242
Задачі.....	243
Розділ 12 КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ГАЗІВ.....	244
12.1. Основне рівняння кінетичної теорії газів.....	244
12.2. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів.....	248
12.3. Ступені вільності молекул.....	249
12.4. Розподіл енергії за ступенями вільності молекул.....	251
12.5. Функція розподілу молекул за швидкостями (Максвелла).....	252
12.6. Вплив температури на перебіг хімічної реакції у газовій суміші.....	257
12.7. Дослід Штерна.....	258
12.8. Барометрична формула.....	259
12.9. Розподіл Больцмана.....	260
12.10. Вільний пробіг молекул.....	262
Контрольні запитання.....	263
Приклади розв'язування задач.....	264
Задачі.....	265
Розділ 13 ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ГАЗАХ.....	266
13.1. Дифузія. Внутрішнє тертя. Теплопровідність.....	266
13.2. Теорія процесів перенесення в газах.....	269

13.2.1. Потік молекул через поверхню.....	269
13.2.2. Дифузія.....	271
13.2.3. Внутрішнє тертя (в'язкість).....	273
13.2.4. Теплопровідність.....	275
13.2.5. Співвідношення між коефіцієнтами явищ перенесення.....	277
Контрольні запитання.....	278
Приклади розв'язування задач.....	278
Задачі.....	279

Розділ 14 МЕТОДИ ОТРИМАННЯ І ВИМІРЮВАННЯ ВИСОКОГО ВАКУУМУ..... 280

14.1. Методи отримання високого вакууму.....	280
14.1.1. Насоси попереднього розрідження.....	281
14.1.2. Високовакуумні насоси.....	281
14.2. Вимірювання низьких тисків.....	283
14.2.1. Термоелектричний манометр.....	283
14.2.2. Іонізаційний манометр.....	284
14.2.3. Манометр Мак-Леода.....	285
14.3. Властивості газів за низьких тисків.....	286
14.3.1. Теплопередача.....	286
14.3.2. Ефузія.....	287
Контрольні запитання.....	289

Розділ 15 РЕАЛЬНІ ГАЗИ..... 290

15.1. Потенціальна крива взаємодії молекул.....	290
15.2. Поняття про природу сил взаємодії між молекулами.....	292
15.3. Рівняння стану реального газу (Ван-дер-Ваальса).....	293
15.4. Ізотерми Ван-дер-Ваальса.....	295
15.5. Властивості насиченої пари.....	298
15.6. Вологість повітря.....	298
Контрольні запитання.....	300
Приклади розв'язування задач.....	300
Задачі.....	301

Розділ 16 ТЕРМОДИНАМІКА. ПЕРШИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ..... 302

16.1. Способи перенесення теплової енергії.....	302
16.2. Оборотні та необоротні процеси.....	303
16.3. Внутрішня енергія.....	306
16.4. Перший принцип термодинаміки.....	307
16.5. Внутрішня енергія ідеального газу.....	308
16.6. Робота в термодинаміці.....	308
16.7. Теплоємність газу.....	309
16.8. Залежність теплоємності газу від температури.....	312
16.9. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона.....	313
16.10. Політропний процес.....	316
16.11. Робота ідеального газу в різних процесах.....	317
16.12. Внутрішня енергія реального газу.....	319
16.13. Ефект Джоуля-Томсона. (Адіабатне розширення реального газу).....	320
16.14. Зрідження газів.....	324
Контрольні запитання.....	326
Приклади розв'язування задач.....	326
Задачі.....	328
 Розділ 17 ДРУГИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ.....	329
17.1. Циклічні (колові) процеси. Теплова машина.....	329
17.2. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії циклу Карно.....	330
17.3. Принцип дії холодильної машини.....	334
17.4. Поняття про роботу двигунів внутрішнього згорання.....	335
17.5. Зведена кількість теплоти. Нерівність Клаузіуса.....	336
17.6. Поняття про ентропію.....	338
17.7. Статистичне тлумачення ентропії.....	343
17.8. Формулювання другого принципу термодинаміки. Спрямо- ваність термодинамічних процесів у природі.....	344
17.9. Теорема Нернста.....	346
17.10. Термодинамічні потенціали Гельмгольца і Гіббса.....	347
Контрольні запитання.....	350
Приклади розв'язування задач.....	350
Задачі.....	352
 Розділ 18 ТВЕРДЕ ТІЛО.....	353

18.1. Кристали.....	353
18.2. Типи кристалічних ґраток.....	355
18.3. Вплив дефектів кристалічної ґратки на механічні властивості кристалів.....	356
18.4. Енергетичний спектр класичного і квантового осциляторів	357
18.5. Теплові коливання атомів у кристалі. Фоони.....	359
18.6. Механізм теплопровідності кристалів.....	360
18.7. Теплоємність твердих тіл.....	362
187.1. Формула Дюлонга і Пті.....	362
18.7.2. Поняття про теорію теплоємності твердих тіл Айнштейна і Дебая.....	363
Контрольні запитання.....	365
Приклади розв'язування задач.....	366
Задачі.....	366
 Розділ 19 РІДИНИ.....	367
19.1. Структура рідин.....	367
19.2. Поняття про діркову теорію рідини.....	36
19.3. Дифузія в рідинах.....	370
19.4. Поверхневий натяг.....	371
19.5. Змочування.....	374
19.6. Тиск під викривленою поверхнею рідини. Формула Лапласа.....	376
19.7. Капілярні явища.....	378
Контрольні запитання.....	378
Приклади розв'язування задач.....	379
Задачі.....	381
 Розділ 20 ЗМІНА АГРЕГАТНОГО СТАНУ РЕЧОВИНИ.....	382
20.1. Фази і фазові переходи.....	382
20.2. Випаровування і конденсація.....	383
20.3. Кипіння.....	385
20.4. Сублімація. Плавлення і кристалізація.....	385
20.5. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.....	387
20.6. Діаграма стану.....	389

20.7. Аморфні тіла. Полімери.....	390
20.8. Рідкі кристали.....	392
20.9. Розчини.....	394
20.10. Осмотичний тиск.....	397
20.11. Сплави та тверді розчини.....	398
20.12. Поняття про старіння та загартовування матеріалів.....	400
Контрольні запитання.....	402
Приклади розв'язування задач.....	402
Задачі.....	404
Список літератури.....	405
Предметний покажчик.....	406

Навчальне видання

Роман Михайлович Кушнір

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА
Механіка. Молекулярна фізика

Навчальний посібник
для студентів нефізичних спеціальностей вищих навчальних закладів

Підп. до друку . Формат 60×90/16. Папір друк.
Друк. офсет. Умовн. друк. арк. . Обл.-вид. арк.
Тираж прим. Зам.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка
79001 Львів, вул. Дорошенка, 41.

