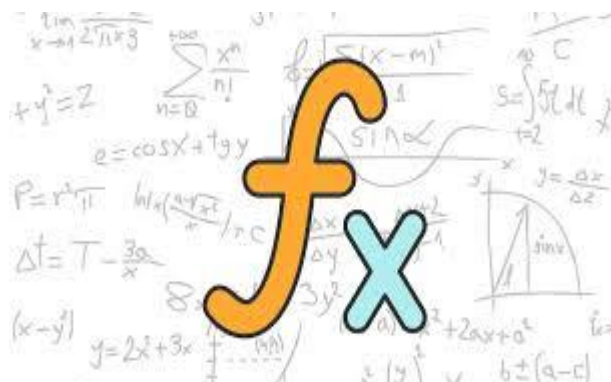
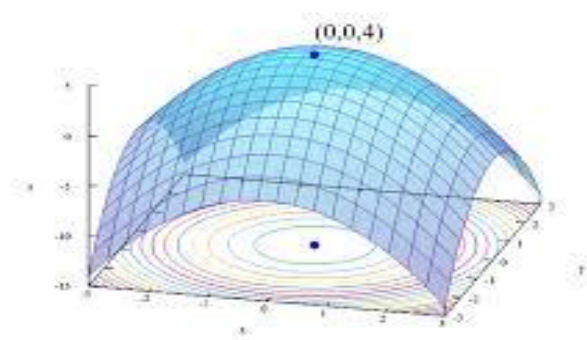


ДЕРЖАВНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«Херсонське вище професійне училище №2»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ЩОДО МАТЕМАТИЧНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОФЕСІЙНИХ
ЗАДАЧ



Укладач:

Степаненко Л.В., спеціаліст вищої категорії, старший викладач

Методичні рекомендації щодо створення математичних моделей містять інформацію про особливості і практичні аспекти створення математичних моделей професійних задач .

Можуть бути використанні викладачами закладів фахової передвищої освіти.

Схвалено педагогічною радою ДНЗ «Херсонське вище професійне училище №2»
(протокол від)

Зміст

ВСТУП	4
ОСНОВНА ЧАСТИНА	5
2.1 Теоретичні основи створення математичних моделей.....	5
2.2 Практичні аспекти створення математичних моделей	10
2.3 Приклади практичної реалізації створення математичних моделей професійних задач.....	12
ВИСНОВКИ.....	22
ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА	23

Вступ

Актуальність. Соціально-економічні зміни, що відбуваються у суспільстві, «...потребують якісно нового рівня підготовки фахівців різного профілю. Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) стають потужним інструментом в усіх сферах суспільного життя, зокрема і у сфері освіти» [4]. В Україні поступово відбувається усвідомлення важливості інформатизації освіти як складової інформатизації суспільства. Протягом останніх років спостерігається значне прискорення темпів інформатизації освіти.

Пріоритетним завданням наразі є «...створення такого інформаційного суспільства, в якому б кожна людина могла вільно створювати та накопичувати інформацію і знання та мати до них вільний доступ для реалізації власного потенціалу» [1]. Для виконання даного завдання необхідне впровадження ІКТ у різні сфери життєдіяльності людини, забезпечення ІКТ-компетентності населення шляхом створення системи освіти, що базується на використанні ІКТ у формуванні всебічно розвиненої особистості.

Для підготовки висококваліфікованого сучасного інженера необхідна якісна фундаментальна підготовка, що є основою фахової підготовки інженера.

В підготовці бакалаврів вища математика відіграє важливу роль, тому що всі прикладні задачі розв'язується саме за допомогою методів математичного моделювання. Математична підготовка відіграє особливу роль у підготовці майбутніх інженерів, оскільки опанування методів математичного моделювання надає бакалаврам можливість ефективно застосовувати набуті знання на практиці, чітко розуміючи способи застосування того чи іншого математичного методу при розв'язанні професійних задач.

Слід зазначити, що «...застосування особистісно-орієнтованого підходу до навчання ставить у центр уваги особистість активного та мобільного здобувача освіти і вимагає переходу від усередненого для усіх здобувачів освіти навчального середовища навчального закладу до персоналізованого навчального середовища»[4]. Таке середовище розвивається зі зміною навчальних потреб здобувача освіти.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати, розробити та експериментально перевірити методичні основи створення математичних моделей професійних задач у підготовці майбутніх фахівців.

Об'єкт дослідження – навчання вищої математики бакалаврів.

Предмет дослідження – методичні основи створення математичних моделей професійних задач у підготовці майбутніх фахівців.

Дана методична розробка містить рекомендації викладачам навчальних закладів щодо створення та використання математичних моделей професійних задач з вищої математики.

Основна частина

2.1 Теоретичні основи створення математичних моделей

Модель (від лат. *modulus* – міра, зразок, норма) – це об’єкт-замінник, створений з метою відтворення при певних умовах суттєвих властивостей об’єкта-оригіналу. Модель може бути представлена фізичним об’єктом, подібним до оригіналу, або описом об’єкта у вигляді математичних формул, тексту, комп’ютерної програми.

Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об’єкта потрібно підібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об’єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об’єкту.

Математичною моделлю називається сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об’єкту або системі.

Методи математичного моделювання використовуються для аналізу, прогнозування, оптимізації та керування складними системами та процесами в різних галузях, таких як інженерія, наука, економіка та військова справа, шляхом заміни реальних об’єктів їхніми спрощеними математичними представленнями. Це дозволяє вивчати властивості систем, керувати ними та розробляти оптимальні рішення в умовах, коли прямі експерименти неможливі або занадто дорогі.

Сфери застосування математичного моделювання:

Інженерія та технологічні процеси:

Проектування, аналіз та оптимізація роботи хімічних заводів, електростанцій, виробничих операцій та інших складних систем.

Наукові дослідження:

Прогнозування розвитку природних явищ, вивчення біологічних процесів, аналіз екологічних систем.

Економіка:

Моделювання ринкових процесів, фінансових систем, прогнозування економічного розвитку.

Військова справа:

Розробка оптимальних стратегій і тактик ведення бойових дій, управління озброєнням та засобами електронної війни, а також обслуговування військової техніки.

Соціальні та психологічні науки:

Обробка великої кількості даних, встановлення закономірностей та моделювання поведінки людей та соціальних явищ.

Переваги використання математичних методів моделювання:

Чіткість та структурування:

Математичні методи роблять дослідження більш структурованими та раціональними.

Прогнозування:

Моделі дозволяють передбачати хід процесів і результат прийняття рішень.

Оптимізація:

Можливість знаходити найкращі параметри та керувати процесами для досягнення бажаних показників.

Керування системами:

Математичне моделювання допомагає приймати обґрунтовані управлінські рішення.

Вивчення недоступних об'єктів:

Моделювання дозволяє досліджувати системи, які важко або неможливо дослідити безпосередньо (наприклад, космічні об'єкти чи екологічні катастрофи).

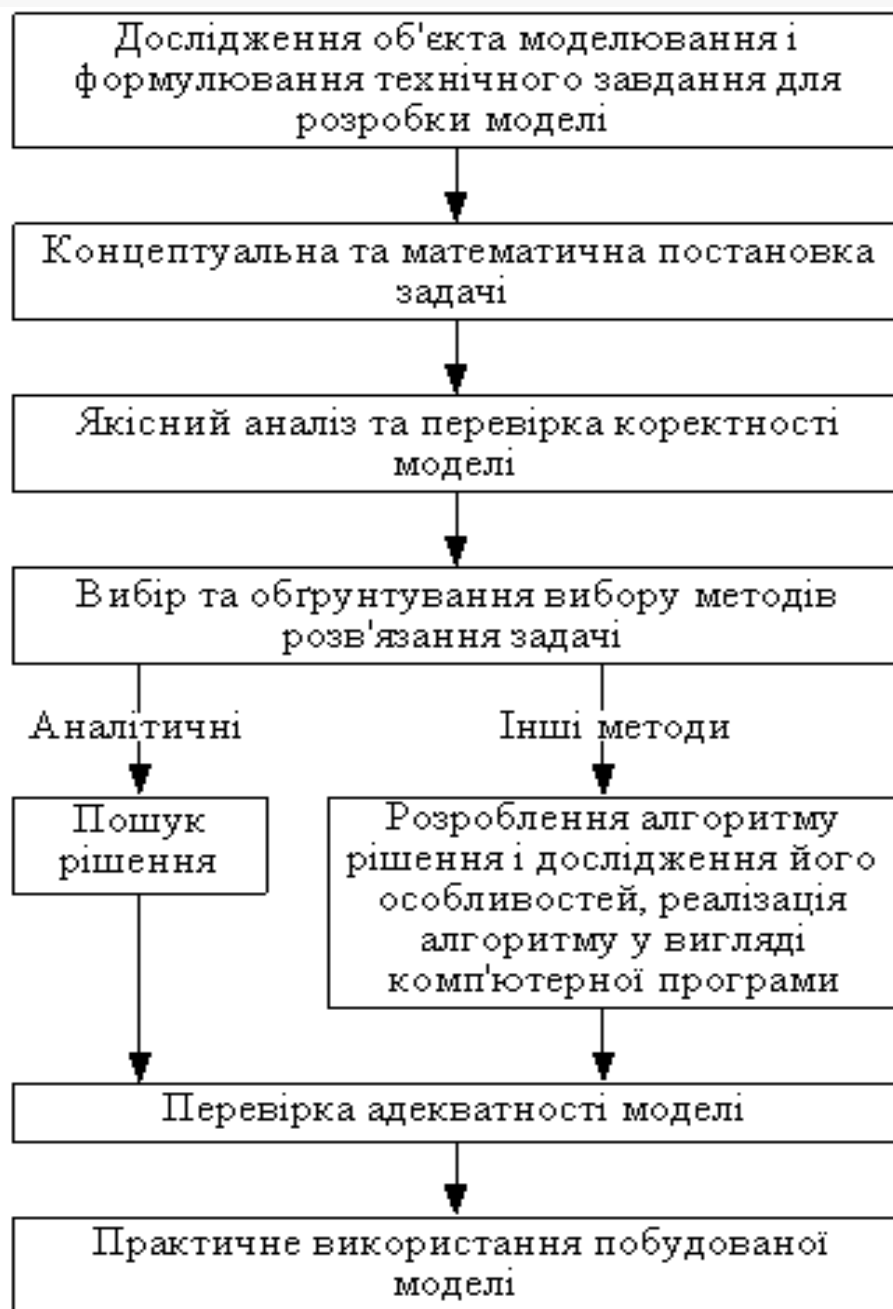
Математичне моделювання можна розглядати як засіб вивчення реальної системи шляхом її заміни зручнішою для експериментального дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні риси оригінала. При моделюванні здійснюється апроксимація функції опису більш простою і зручною для практичного аналізу функцією – моделлю.

Дослідження об'єкту моделювання і складання його математичного опису полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

Інженерна діяльність у будівельній галузі вимагає високого рівня володіння математичними методами аналізу, моделювання та розрахунку, що має вирішальне значення для забезпечення якості проєктування, будівництва та експлуатації об'єктів.

Цифровізація та впровадження інноваційних технологій у будівництві спричиняють підвищення вимог до фахової підготовки інженерів, зокрема щодо їхньої здатності застосовувати математичні моделі та алгоритми для оптимізації будівельних процесів

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна представити послідовністю етапів:



На етапі дослідження об'єкта моделювання потрібно виконати наступні дії:

- аналіз взаємодії об'єкта з зовнішнім середовищем, виділення характеристик вхідних впливів та реакції об'єкту, класифікація їх на вимірні та невимірні, керуючі та перешкоди;
- проведення декомпозиції та дослідження внутрішньої структури об'єкту;
- дослідження порядку функціонування об'єкту, виявлення зв'язку між входом та виходом, формування множини станів об'єкту;
- збір та перевірка існуючих експериментальних даних про об'єкти-аналоги, проведення, при необхідності, додаткових експериментів;
- класифікація об'єкта моделювання на стаціонарний чи нестаціонарний, визначення міри впливу випадкових факторів на об'єкт та порядку нелінійності зв'язків між характеристиками об'єкту;
- аналітичний огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об'єктів;
- аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розроблення загального плану створення математичної моделі.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) список основних питань, а також сукупність гіпотез відносно особливостей та поведінки об'єкта моделювання.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку та характеристики об'єкта моделювання. Необхідно формалізувати змінні моделі та зв'язки між ними. Математичний опис моделі складається на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів в досліджуваному об'єкті, і виражається на мові будь-яких розділів математики.

Найбільше поширення при побудові моделей набули алгебраїчні рівняння та системи, звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння в частинних похідних, матрична алгебра, методи теорії імовірності, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Математична модель є *коректною*, якщо для неї отримано позитивний результат по всіх контрольних перевірках: розмірності, порядку, характеру залежностей, граничних умов, фізичного сенсу тощо.

Для математичної моделі обирається один з методів розв'язку, який дозволяє при заданих значеннях вхідних змінних отримати значення вихідних змінних.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт моделювання є вимога адекватності моделі об'єкту. *Адекватність* – це відтворення моделлю з необхідною повнотою

всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження. Як правило, адекватність моделі визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об'єкту при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об'єкті моделювання.

Метод математичного моделювання дозволяє виключити необхідність виготовлення громіздких фізичних моделей, пов'язаних з матеріальними витратами; скорочувати час визначення характеристик (особливо при розрахунку математичних моделей на комп'ютері і вживанні ефективних обчислювальних методів і алгоритмів); вивчати поведінку об'єкту моделювання при різних значеннях параметрів; аналізувати можливість застосування різних елементів; отримувати характеристики і показники, які складно отримувати експериментально (кореляційні, частотні, параметричної чутливості).

На підставі різних критеріїв класифікації, виділяють наступні види моделей:

- динамічні або статичні;
- детерміновані або стохастичні;
- неперервні, дискретні або дискретно-неперервні;
- лінійні чи нелінійні;
- з розподіленими або зосередженими параметрами;
- аналітичні, імітаційні чи комп'ютерні.

Математичне моделювання можна поділити на такі:

Аналітичне моделювання, під яким зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень.

Імітаційне моделювання, при якому на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта.

Аналітичні методи полягають у пошуку явних залежностей між характеристиками. Однак такі залежності можливо отримати лише для невеликої кількості простих моделей, як правило, лінійних. Інколи виконують спрощення моделей для отримання можливості вивчити хоча б загальні властивості об'єкта.

Чисельні методи (numerical methods) дозволяють отримати розв'язок аналітичних моделей, для котрих застосування аналітичних методів неможливо або недоцільно.

Аналітичне моделювання

Для цього методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

Аналітична математична модель звичайно досліджується такими методами як: аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі; числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи процес; якісним – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості. Утім, аналітичні рішення вдається отримати лише в обмеженій кількості випадків для відносно простих рівнянь, або їх систем.

Імітаційне моделювання

Особливістю цього методу моделювання є те, що алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи, в певному наближенні, зрозуміло. Елементарні явища, які формують процес функціонування системи, імітуються в їх логічній та часовій послідовності. Головна перевага такого виду моделювання – можливість роботи зі складнішими системами та процесами, аніж це може дозволити аналітичне моделювання. Головним засобом такого моделювання слугують комп'ютери. Під час імітаційного моделювання комп'ютер відтворює алгоритм – «логіку» системи, яка моделюється, її поведінку в часі за умови різних наборів зовнішніх впливів. Прикладом найпростішої імітаційної моделі можна назвати комп'ютерні моделі різних видів руху матеріальних точок або тіл. У таких моделях імітується спостереження за позиціями рухомого тіла в різні моменти часу, відтворюється траєкторія руху, варіюються його параметри тощо.

2.2 Практичні аспекти створення математичних моделей

Методи побудови математичних моделей систем і процесів

Основна властивість кожної моделі полягає в тому, що вона відображає найсуттєвіші властивості оригіналу. **Математична модель** – це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, формул, рівнянь тощо, що є записами законів природи, які керують досліджуванним об'єктом чи явищем.

Під час створення математичних моделей можна вирізнити **три основні стадії** підготовки такої моделі:

1. Створення уявної моделі.
2. Створення концептуальної моделі.
3. Створення формальної моделі.

Уявна модель формується в голові дослідника під час спостережень за об'єктом моделювання як його мислений образ. Формуючи таку ідеальну модель розробник звичайно намагається отримати відповіді на певні питання, зокрема, чим саме можна знехтувати в реальному і складному об'єкті, а які властивості, навпаки, варто утримати в його образі. Представлення такої уявної моделі звичайною мовою (так

званий вербальний образ) називають змістовною моделлю. Такі моделі поділяють на описові, пояснючі та прогностичні відповідно до їх функції.

Концептуальна модель є абстрактною моделлю, яка визначає структуру об'єкта моделювання, властивості його елементів, причиннонаслідкові зв'язки, які притаманні об'єкту і важливі для побудови його моделі.

Формальна модель є презентацією концептуальної моделі за допомогою деякої формальної мови: зокрема це може бути мова математики, алгоритмічна мова, мова програмування тощо.

Алгоритм побудови математичної моделі:

1. Проаналізувати умову задачі та визначити, що буде вхідними даними, кінцевими результатами (вихідними даними) та проміжними результатами.
2. Увести позначення для усіх даних.
3. Записати формули та співвідношення, які пов'язують вхідні дані з кінцевими результатами.

Процес математичного моделювання можна розділити на низку характерних етапів, зокрема:

Аналіз предметної області.

Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, у якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта.

Побудова моделі предметної області.

На наступному етапі формулюють модель предметної області. Вже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

Математичне формулювання задачі.

На основі аналізу предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, які властиві його складовим частинам тощо.

Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження.

Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

Математична модель. Числовий експеримент.

Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними. Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів.

Тестування моделі.

Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта.

Моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Наприклад закон Ньютона у фізиці або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

Аналіз та інтерпретація результатів.

На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо.

Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі.

Розрізняють ***математичні моделі першого і другого роду.***

До *моделей першого роду* належать графіки, графи, схеми, числові таблиці, різні кібернетичні моделі. Абстрактніший характер мають надзвичайно важливі для теоретичних досліджень і практики *моделі другого роду* – рівняння, нерівності та їхні системи.

Розробка моделей поєднує в собі науку і мистецтво. На жаль, немає чіткого формального алгоритму, який би дозволив побудувати модель для будь-якого об'єкту.

Тому розглядаються лише певні ***методичні рекомендації щодо розробки моделей.***

2.3 Приклади практичної реалізації створення математичних моделей професійних задач

Викладання математики прикладне за своєю суттю і підходах, тому може використовуватись для підсилення математичного змісту профільюючих дисциплін.

Значний вклад у розвиток прикладної математики вніс **український математик Михайло Кравчук** – академік всеукраїнської академії наук, її вчений секретар, якого у 1938 році безпідставно репресували й засадили на Колиму, де він і загинув.

Задачі поділяють на математичні та прикладні.

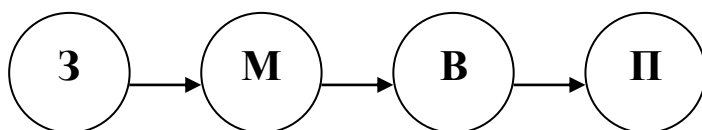
Математичні задачі – це задачі, в яких об'єктами є математичні об'єкти (фігури, числа). **Прикладні задачі** – це задачі, умови яких містять нематематичні поняття, це завдання з реального життя, яке потребує застосування математичних знань, **побудови математичної моделі** та її розв'язання для отримання відповіді.

Щоб створити відповідну модель, треба знати не тільки математику, а й ту галузь науки чи виробництва, з якою пов'язана дана прикладна задача.

Розв'язування будь-якої прикладної задачі математичними методами здійснюється в три етапи:

- 1) формулюємо задачу мовою математики, тобто **будуємо математичну модель**;
- 2) розв'язуємо одержану математичну задачу;
- 3) записуємо математичний розв'язок мовою, якою була сформульована початкова задача.

Схематично ці етапи можна зобразити так:



З – дана прикладна задача,

М – її математична модель.

В – відповідь до моделі,

П – відповідь до прикладної задачі.

Перехід від З до М називають **процесом моделювання**.

Приклади математичних моделей

1. Задача.

Поживність 1 кг сіна складає 0,42, а силосу — 0,20 кормових одиниць. Сіно містить 85 %, а силос — 27 % сухої речовини. Скільки сіна і скільки силосу потрібно давати корові на добу, якщо вона повинна отримати 6 кормових одиниць і 9 кг сухої речовини?

Розв'язання.

Нехай раціон корови містить x кг сіна і y кг силосу. Тоді маємо:

$$\begin{cases} 0.4x + 0.2y = 6 \\ 0.85x + 0.27y = 9 \end{cases}$$

$$x = 3 \text{ кг}, y = 23 \text{ кг}.$$

У цій задачі ми мали справу з нематематичними поняттями: сіно, силос, корова, кормові одиниці. Це прикладна задача. Щоб її розв'язати, складаємо систему рівнянь, що є **математичною моделлю** даної прикладної задачі.

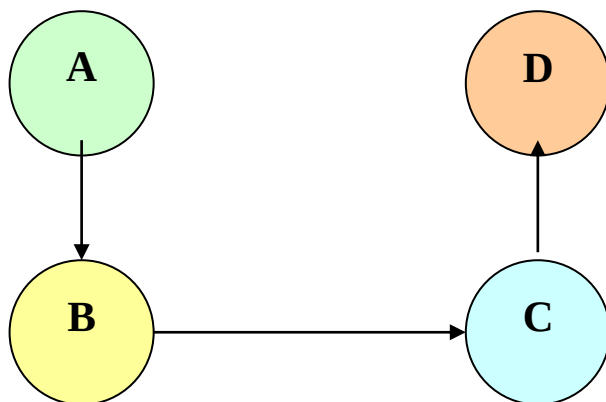
Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта.

Математичні моделі створюють із математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, функцій, рівнянь, нерівностей, їх систем.

Розв'язування прикладної задачі здійснюється в три етапи:

1. Створення математичної моделі запропонованої задачі (для нашого прикладу - це система двох лінійних рівнянь з двома невідомими).
2. Розв'язування відповідної математичної задачі.
3. Аналіз відповіді.

Схематично ці етапи можна показати так:



Тут А — прикладна задача, В — її математична модель, С — відповідь для моделі, D — відповідь до прикладної задачі. Аналіз відповіді є важливим етапом розв'язання задачі. Адже буває так, що корінь рівняння, що є моделлю задачі, задовольняє рівняння, але не задовольняє умову задачі.

Перехід від А до В — це **створення потрібної моделі**, тобто процес моделювання. Взагалі, щоб створити модель, треба знати не лише математику, а й ту прикладну галузь, про яку йдеться у задачі. Математичними моделями здебільшого є функції, рівняння, нерівності, системи рівнянь та системи нерівностей.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

є **математичною моделлю напруги** в електричному колі (в електротехніці), рівноваги для системи важелів або пружин (у механіці), завантаженості верстатів (у плануванні) та ін.

Функція $y = a^x$ є **математичною моделлю**, яка описує зростання продуктивності праці, зміну атмосферного тиску розмноження бактерій, приріст деревини, населення, збільшення вантажопідйомності транспорту тощо.

Математичні моделі набули широкого застосування **в економіці**.

2. Задача.

Треба скласти математичну модель заробітної платні робітникам згідно з відрядно-преміальною системою.

Нехай z – заробітна платня, x – кількість виготовленої продукції, a – тарифна ставка одиниці продукції, p – премія за перевиконання норми.

Маємо **модель**: $z = ax + p$

Економіко-математичні моделі дозволяють розв'язувати багато задач, зокрема так званих оптимізаційних, які виникають у найрізноманітніших видах людської діяльності.

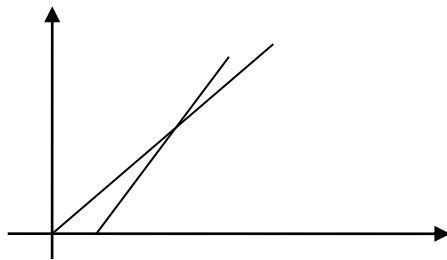
Приклад: У цеху одного із заводів випускають прилади двох видів. Виробнича потужність цеху - 100 приладів першого виду або 300 другого виду. Але відділ технічного контролю в змозі перевірити тільки 150 виробів на добу. Крім того, вироби першого виду вдвічі дорожчі за вироби другого виду. Потрібно скласти такий план випуску продукції, який за даних умов забезпечував би цеху найбільший прибуток.

3. Задача.

Із пункту A в пункт B виїхав велосипедист і рухався зі швидкістю 20 км/год., а через півгодини слідом за ним виїхав мотоцикліст і рухався із швидкістю 36 км/год. Через який час після виїзду велосипедиста його наздожене мотоцикліст

Розв'язання

Можна побудувати різні **математичні моделі** до цієї задачі. Побудуємо математичну модель за допомогою графіків. Залежність шляху, пройденого велосипедистом, від часу можна задана формулою $S_1 = 20t$, а шляху, пройденого мотоциклістом, - формулою $S_2 = 36(t - 0.5)$. Щоб дати відповідь на запитання задачі, потрібно знайти абсцису точки перетину графіків.



З малюнка знаходимо, що $t=1,1$ год.

Відповідь. $t=1,1$ год.

Приклади задач, що мають спільну *математичну модель* – *рівняння виду* **$ax+by=c$:**

1. Як можна розміняти 1 грн. на монети по 2 к. і 5к.?

(Нехай x і y – кількість відповідно дво- і п'ятикопійкових монет. Тоді **$2x+5y=100$.**)

2. Два автомобілі перевезли за день 82 т зерна. Вантажність одного автомобіля 8т. а другого – 6т. Скільки рейсів могли зробити автомобілі?

(Нехай один автомобіль зробив x рейсів, а другий – y рейсів. Тоді **$8x+6y=82$.**)

3. У швейному цеху є 38 м тканини. На пошиття піжами потрібно 4 м тканини, а на халат – 3м. Скільки можна пошити піжам і халатів?

(Нехай x та y – відповідно кількість піжам і халатів. Тоді **$4x+3y=38$.**)

Щоб засвоїти *найпростіші приклади фізичних процесів*, достатньо однієї математичної моделі. Так пов'язані між собою заряд конденсатора і напруга в ньому: $q=CU$; напруга на кінцях провідника і сила струму: $U=RI$; потік магнітної індукції, який пронизує контур, і сила струму в контурі: $\Phi=LI$.

Коефіцієнти пропорційності в цих формулах: C – ємність, R – опір, L – індуктивність – сталі величини, які характеризують властивості певної речовини.

Прямо пропорційна залежність *моделює* також залежність між масою та об'ємом за сталої густини:

$$m=\rho \times V;$$

залежність між шляхом і часом під час рівномірного руху:

$$s=v \times t;$$

залежність між довжиною кола та його діаметром:

$$C=\pi \times d.$$

Залежність між довжиною стержня і температурою нагрівання описується формулою

$$l=l_0(1+\alpha t);$$

між об'ємом газу та його температурою при сталому тиску – формулою

$$V=V_0(1+\beta t) \text{ – закон Гей-Люссака;}$$

Між швидкістю і часом під час рівноприскореного руху – формулою

$$v=v_0+at \text{ тощо.}$$

У фізиці кожна із залежностей розкладається окремо, коли вивчається відповідне явище.

Найпростіші математичні моделі в біології та екології, в яких визначальну роль відіграють елементарні функції.

Наприклад, на певному проміжку часу (зокрема, на ранній стадії) розвитку риби її довжина лінійно залежить від віку :

$$L=b\times t,$$

де L – довжина, t – час, b – параметр (коефіцієнт пропорційності), який залежить від виду риби і за даними натуральних спостережень.

Цікавішим є застосування в екології дещо складнішої функціональної залежності – так званої обернено пропорційної залежності:

$$y = \frac{k}{x}, k - \text{const}, x \neq 0.$$

Ця залежність застосовується для **математичного моделювання** взаємостосунків типу «хижак - жертва». Зокрема такі взаємостосунки мають популяції зайців і вовків. У певній період їх розвитку залежність кількості N популяції зайців від кількості n популяції вовків може бути виражена функцією

$$N = \frac{k}{n},$$

де параметр k визначається на основі даних натуральних спостережень. Якщо в якийсь певний момент часу було зафіксовано $N=120$ і $n=30$, то $k=120\times 30=3600$.

Отже, кількість зайців залежно від кількості вовків можна визначити за формулою:

$$N = \frac{3600}{n}.$$

Можна бачити, що чим більше налічується вовків, тим менше буде зайців. Проте слід зазначити, що ця залежність, крім хижацтва вовків, не враховує інших факторів, які впливають на розмноження і смертність зайців. Тому такою залежністю користуватися можна тільки за певних досить жорстоких обмежень і для досить грубого прогнозування.

Математики разом з біологами створили **математичні моделі** цілих організмів людини. У найпростіших випадках – це окремі формули, частіше системи з десятків і навіть сотень рівнянь, які математично виражають діяльність людини, перебіг біологічних процесів. Саме на шляху **математичного моделювання** вчені бачать ефективне лікування і профілактику серцево-судинних захворювань.

Математична модель створення системи лінійних рівнянь полягає у формулюванні реальної задачі як системи рівнянь, що описують взаємозв'язки між

невідомими, які потрібно знайти. Після цього система розв'язується за допомогою певного методу, такого як графічний, підстановки, додавання або матричний, щоб знайти значення змінних, які задовольняють всім рівнянням системи одночасно.

Суть *математичної моделі розв'язання систем лінійних рівнянь* полягає у використанні математичного апарату (наприклад, матриць) для знаходження значень невідомих, що одночасно задовольняють усі рівняння системи. Це дозволяє спростити та формалізувати реальні задачі, перетворюючи їх на систему рівнянь, а потім, застосовуючи певні методи (наприклад, [матричний метод](#), метод підстановки), знайти єдиний розв'язок або визначити його відсутність.

Ключові аспекти моделі:

Спрощення реальності:

Створення спрощеної моделі реального процесу або задачі, яка адекватно відображає її суть, але зручна для аналізу.

Формалізація:

Представлення задачі у вигляді системи рівнянь, де кожне рівняння описує певну залежність між величинами, а невідомі змінні представляють шукані параметри.

Застосування математичних інструментів:

Використання математичних засобів, таких як матриці, вектори, рівняння, для представлення та маніпулювання даними системи.

Знаходження розв'язку:

Застосування алгоритмічних методів (наприклад, метод підстановки, метод Гауса, матричний метод) для знаходження значень невідомих, які задовольняють усі рівняння системи одночасно.

Прогнозування та аналіз:

Отриманий розв'язок дозволяє прогнозувати результати, досліджувати поведінку системи за різних умов та приймати раціональні рішення.

Приклади:

1. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими

може моделювати задачу, де потрібно знайти координати точки перетину двох прямих на площині.

2. Матрична модель

використовує матриці для представлення коефіцієнтів системи, а розв'язання системи зводиться до дій з цими матрицями, наприклад, множення на обернену матрицю.

У загальному випадку задача формулюється таким чином: знайти значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, що задовольняють систему з M лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР, system of linear algebraic equations):

[illegible]

або в матричній формі $AX = B$, де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

3.Геометричний сенс розв’язку СЛАР полягає в пошуку точки перетину n -мірних гіперплощин у n -мірному гіперпросторі. Розв’язком є стовпець X . Якщо рівнянь лише два, то маємо випадок двох прямих на площині, які можуть перетинатися, бути паралельними або співпадати. Тому будь-яка СЛАР може мати:

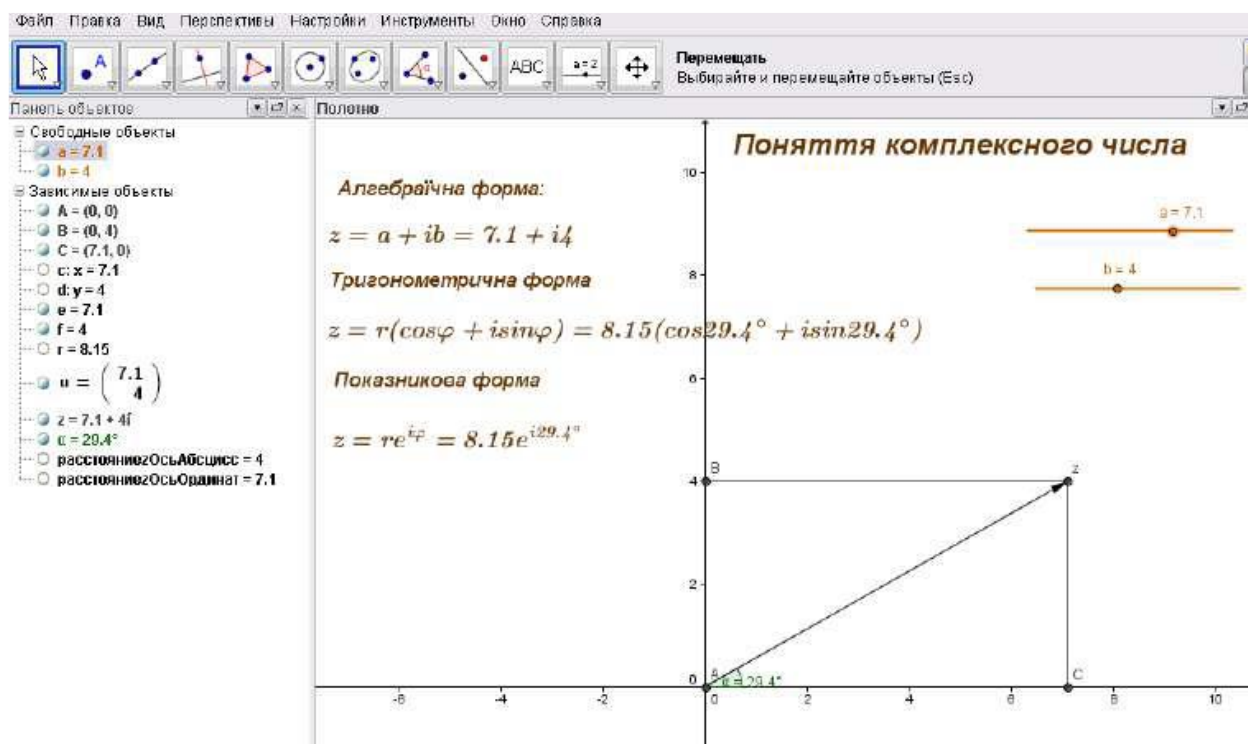
- 1) єдиний розв'язок;
- 2) безкінечну множину розв'язків;
- 3) не мати розв'язку взагалі.

Необхідною і достатньою умовою існування єдиного розв'язку є нерівність нулю визначника A (лінійна незалежність рівнянь):

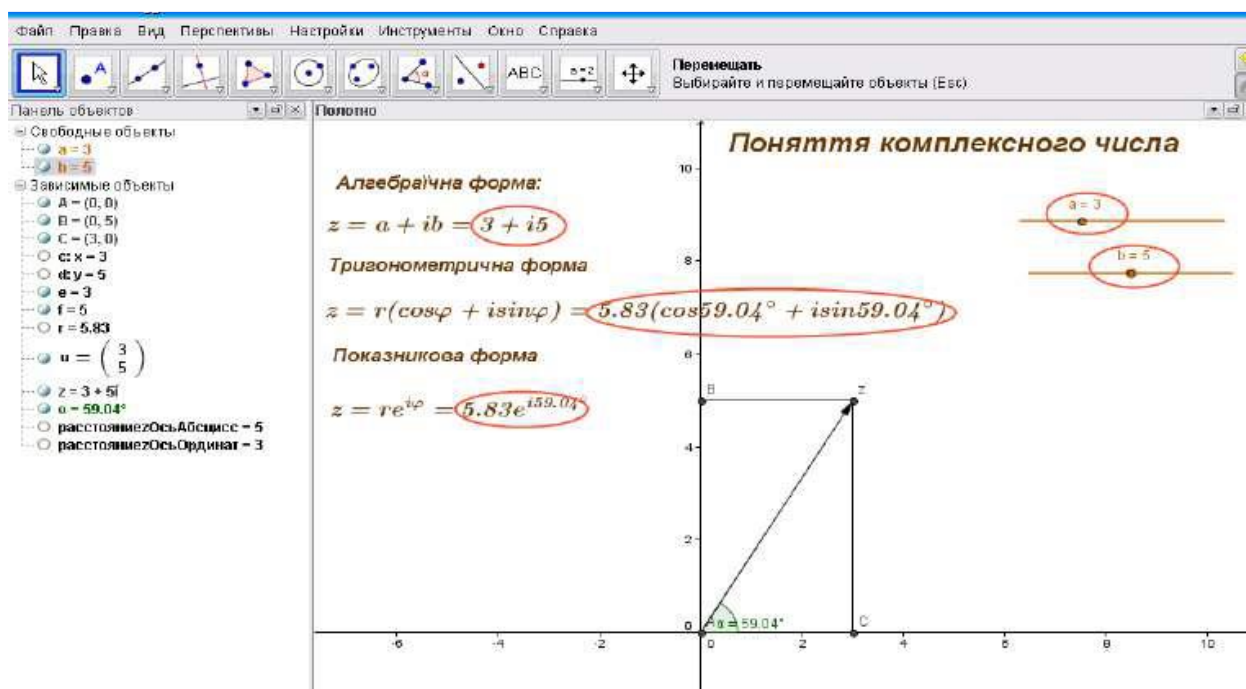
$\det A \neq 0$

Приклад створення моделі лекційної демонстрації за темою «Комплексні числа. Дії над комплексними числами»

Для розуміння того, що будь-яке комплексне число може бути записане в трьох різних формах: алгебраїчна, тригонометрична та показникова, пропонується така модель (*Динамічна модель* «Поняття комплексного числа»):



При зміні значень a і b відбувається зміна в усіх трьох записах числа. Так, змінивши ці константи, одержимо:



Прикладами *математичних моделей* є: рівняння коливань як модель циклічного процесу; логістична крива як модель кривої зростання; рівняння рівномірного та рівноприскореного руху, тощо.

Математична модель – це наближений опис довільного класу явищ зовнішнього світу, поданий за допомогою математичної символіки.

Математичне моделювання виступає як метод пізнання зовнішнього світу, а також прогнозування і управління. Аналіз математичних моделей дозволяє проникнути в сутність досліджуваних явищ.

Так, у лабораторії не можна змоделювати атмосферні процеси, зробити термоядерний реактор або штучно відтворити етапи розвитку Всесвіту. Тут на допомогу приходить **імітаційне моделювання**. Тож математиками, фізиками й біологами були розроблені моделі глобальних біосферних процесів, які можуть відбутися після ядерної війни. **Результати імітаційного моделювання показали**, що ядерний конфлікт призведе не тільки до загибелі людей від радіації, вибухів, генетичних змін. У результаті ядерних вибухів на всій планеті розпочнуться самопідтримуючі пожежі. В атмосфері будуть носитися величезні хмари сажі, пилу. Настане так звана ядерна ніч. На Землі запанує ядерна зима. Температура знизиться до -40° - -50° .

Застосування математичного моделювання у прогнозуванні фізичних явищ та об'єктів.

Математика дає змогу описати досить широке коло фактів і спостережень. Провести їх детальний аналіз, передбачити, як поводитиме себе об'єкт у різних умовах, тобто спрогнозувати результати майбутніх спостережень. Історія математики знає чимало прикладів, коли в межах удаło побудованої **математичної моделі** за допомогою обчислень, як кажуть «на кінчику пера», вдалося передбачити існування нових фізичних об'єктів.

Французький астроном Урбен Левер'є (1811-1877), досліджуючи неправильність в русі планети Уран, тобто відхилення траєкторії планети від тієї, яку вона повинна була б мати за законом всесвітнього тяжіння, висловив припущення про вплив на її рух невідомої планети. Левер'є відправив берлінському астроному Галле (1812-1910) листа, в якому писав: «Скеруйте ваш телескоп у точку екліптики в сузір'ї Водолія на довготі 326° , і ви знайдете в межах 1° від цього місця нову планету з помітним диском, яка має вигляд зірки приблизно дев'ятої величини». Галле отримав листа 23.09.1864 р., у першу ж ніч скерував свій телескоп у вказане Левер'є місце небосхилу і на відстані лише 52' від нього побачив невідому планету.

Незалежно від Левер'є таке саме передбачення зробив і Джон Адамс (1819-1892). Цей день увійшов в історію науки як день величного тріумфу небесної механіки і математики. З безодні космосу астроном побачив слабкий відблиск диска планети, яку математик «бачив», не поглянувши на небо, за письмовим столом, побачив на основі математичних розрахунків. Її назвали Нептуном. Більше того,

формули видали вченому характеристики орбіти за уранової планети, її масу і відстань від Сонця.

За допомогою математичних обчислень американський астроном Персіваль Лоуелл (1855-1916) у 1915 р. довів існування в сонячній системі дев'ятої планети і розрахував її орбіту. Через 15 років Клайд Томбо за вказівкою Лоуелла відшукав візуально і найвіддаленішу планету Сонячної системи, яку назвали Плутоном.

Є легенда, що Аристотель (384-322 рр. до н. е.) помер з відчаю, не зумівши пояснити морські припливи. Ісааку Ньютону (1643-1727) потрібно було на це кілька сторінок у «Математичних началах натуральної філософії», де він застосував відкритий ним математичний аналіз і три закони Кеплера. А Галілео Галілей (1564-1642) на основі закону всесвітнього тяжіння розрахував час повернення до сонця комети, і вона, як за розкладом, у квітні 1759 р. справді повернулася.

Кожна модель зберігає лише важливе для дослідження даного об'єкта і тому ніби очищує, вивільняє потрібну нам інформацію від безлічі інших характеристик, які в даному випадку нас не цікавлять. Тому потрібна інформація фіксується, так би мовити, в чистому вигляді, що дає можливість відразу побачити закономірності, які нас цікавлять, і навіть виявити такі, які поза математичною моделлю залишилися б прихованими, нерозкритими. Вчені, які вміли читати закодовану в моделях інформацію, робили визначні відкриття «на кінчику пера». Рівняння чи нерівності щедро розкривали їм таємниці глибинних закономірностей природи, дарувала нові елементарні частинки, планети, чорні дірки, квазари й інші загадкові об'єкти реальної дійсності і відношення між ними.

Висновки

Впровадження інтегрованих освітніх технологій, зокрема проблемно-орієнтованого навчання, гейміфікації, використання математичних симуляцій і цифрових платформ, значно покращує рівень математичної підготовки студентів. Доведено, що активне застосування **математичних моделей** у професійно-орієнтованих завданнях сприяє розвитку аналітичного мислення, навичок проєктування та ухвалення інженерних рішень. Використання спеціалізованого програмного забезпечення для розрахунків і **моделювання будівельних конструкцій** дає змогу студентам не лише засвоїти математичні концепції, але й навчитися використовувати їх на практиці у майбутній професійній діяльності.

Отже, впровадження сучасних цифрових технологій, адаптивних методик навчання та інтерактивних платформ сприяє формуванню гнучкої системи професійної підготовки майбутніх інженерів, що відповідає актуальним викликам **будівельної галузі**. Подальші дослідження у цьому напрямі мають бути спрямовані на розробку персоналізованих траєкторій навчання, що враховують рівень підготовки студентів та їхні індивідуальні особливості.

Прикладна спрямованість як діалектична єдність змісту, форм і методів навчання забезпечує майбутніх спеціалістів не тільки необхідними знаннями, вміннями і навичками в галузі математики, але й виховує бажання постійно реалізовувати отримані знання для професійних цілей.

Використані джерела

1. Биков В. Ю. Теоретико-методологічні засади моделювання навчального середовища сучасних педагогічних систем / В. Ю. Биков, Ю. О. Жук // Проблеми та перспективи формування національної гуманітарно-технічної еліти : зб. наук. пр. – 2003. – № 1(5). – С. 64–76.
2. Кислова М. А. Розвиток мобільного навчального середовища як проблема теорії та методики використання інформаційно-комунікаційних технологій в освіті [Електронний ресурс] / Кислова Марія Алімівна, Семеріков Сергій Олексійович, Словак Катерина Іванівна // Інформаційні технології і засоби навчання, 2014. – № 4(42). – С. 1-22. – Режим доступу до журн. : <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/issue/>.
3. Кислова М. А. Міжпредметні зв'язки курсів вищої математики та загальної фізики у навчанні інженерів-електромеханіків / М. А. Кислова // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету. Серія педагогічна / [редкол. : П. С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.]. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 18 : Інновації в навчанні фізики: національний та міжнародний досвід. – С. 200–203.
4. Кислова М. А. GeoGebra – засіб створення динамічних моделей в навчальному середовищі / М. А. Кислова // Наукові записки. – Випуск 4. – Серія : Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. – Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2013. – С. 36–40.
5. <http://repository.dnu.dp.ua:1100/>
6. <http://mmf.dnu.dp.ua/index.php/studentu/books/>
7. <https://docplayer.net/39217144-Matematichni-osnovi-modelyuvannya-sistem.html>
8. Інтернет-ресурси
9. Бахрушин В.Є. Математичні основи моделювання систем: навч. посібник. – Запоріжжя, 2009
10. Павленко П.М., Філоненко С.Ф., Чередніков О.М., Третяк В.В. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. – К. : НАУ, 2017. – 392 с.